Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Departamento de Matemática Aplicada
Álgebra Lineal y Optimización Numérica
Guía de Ejercicios

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Considerando las normas vectoriales definidas para cualquier $x = [x_j] \in \mathbb{R}^n$ por las expresiones:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

y

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Probar que las funciones $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ y $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ definen métricas en $\mathbb{R}^n$.
- Probar o refutar que $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ para cualquier par $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Dada $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, probar o refutar que para cada $x = [x_j] \in \mathbb{R}^n$.

$$\|Ax\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| \right) \|x\|_2$$

Idea: Considere la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. Dado $\varepsilon > 0$. Considerando la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax + b$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Es posible encontrar $\delta > 0$ tal que, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ que cumplen $\|x - y\|_2 < \delta$, se cumple que $\|f(x) - f(y)\|_2 < \varepsilon$?

4. Considerando las tres operaciones elementales enumeradas en la sección 6.1 Sistemas de ecuaciones lineales del libro de texto.

   (a) Pruebe que cualquier operación elemental de tipo tres se puede realizar con cuatro operaciones de los otros tipos.

   (b) Demuestre que cada operación elemental se puede anular por medio de una operación del mismo tipo.

5. Si para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A^{(j)}$ denota la j-ésima columna y $A_{(k)}$ el n-ésimo renglón. Considere el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Probar que el sistema de ecuaciones lineales tiene solución ssi $b \in \text{gen}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$. Demostrar que si $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$ es linealmente independiente, entonces el sistema de ecuaciones lineales tiene a lo sumo una solución.

6. Sea $E(p, q, r)$ la matrix elemental que resulta de sumar el renglón q multiplicado por r, al rengón p, en la matrix identidad I. Determinar la operación elemental a la que corresponde $E(p, q, r)$. Probar que para $p \neq q$, $E(p, q, r)^{-1} = E(p, q, -r)$.

7. Una matriz A se dice antisimétrica cuando $A^\top = -A$. Demuestre que si A es antisimétrica entonces $x^\top Ax = 0$ para toda x.

8. Probar o refutar que toda matriz simétrica positiva definida es no singular.

9. Dada una matriz no singular B. Demostrar o refutar que A es simétrica positiva definida ssi $BAB^\top$ es simétrica positiva definida.

10. Calcular la factorización LU unitaria de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Factorice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

de modo que $A = LL^\top$ con $L \in \mathbb{I}(2)$.

12. Demuestre que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y que las igualdades pueden darse aún para vectores distintos de cero.

13. Demuestre que $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ y que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

14. Dada $A \in \mathbb{GL}_n$, probar que $\kappa(A) \geq 1$.

15. Usando la norma matricial $\|\cdot\|_\infty$, calcular $\kappa(A)$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

16. Probar que $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(A)$ para $A, B \in \mathbb{GL}_n$.

17. Demuestre que $\kappa(\lambda A) = \kappa(A)$ para $A \in \mathbb{GL}_n$ y $\lambda \neq 0$.

18. Demuestre que si $A \in \mathbb{GL}_n$ y $B \in M_n$ cumple $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, entonces $B \in \mathbb{GL}_n$.

19. Demuestre que si $\|A\| < 1$, entonces

$$\|(I - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{1 + \|A\|}$$

20. Demuestre que si $A \in \mathbb{GL}_n$, entonces

$$\|Ax\| \geq \|x\|\|A^{-1}\|^{-1},$$

para $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

21. Dadas $A, B \in M_n$. Demuestre que si $\|AB - I\| < 1$, entonces $2B - BAB$ es una mejor aproximación de A^{-1} que B, en el sentido de que $A(2B - BAB)$ está más cerca de I.

22. Sea $B_k = \sum_{j=0}^{k} A^j$. Demuestre que la sucesión $\{B_k\}_{k\geq 0}$ puede calcularse recursivamente mediante las fórmulas $B_0 = I$ y $B_{k+1} = I + AB_k$.

23. De una serie que represente a A^{-1} bajo la suposición de que $\|I - \alpha A\| < 1$ para algún escalar conocido α.

24. Dados un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$ con $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, una matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

    (a) Escribir un algoritmo que lleve a cabo la operación $B = p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$.

    (b) Modificar el algoritmo anterior para obtener un procedimiento recurrente similar al del problema 11.

    (c) Escribir un algoritmo que lleve a cabo la operación $z = p(A)b$ de forma más eficiente que simplemente evaluar el producto $z = Bb$, explicar la eficiencia de su algoritmo.

25. Demuestre que si $x, y \in \mathbb{C}^n$ cumplen la condición $\|x\|_2 = \|y\|_2$, entonces existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que $Ux = y$.

26. Sea $x \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de una matrix Hermitiana $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\|x\|_2 = 1$. Probar que $x \in \ker\,(A - (x^*Ax)xx^*)$. Es cierto el recíproco?

27. Se define la traza de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como $\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$. Sabiendo que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para cualquier par $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda$ (la traza de A es igual a la suma de sus valores propios).

28. Probar que para toda proyección $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathrm{tr}(P) \in \mathbb{Z}_0^+$. Idea: Probar que $\sigma(P) \subseteq \{0, 1\}$.

29. Demuestre que si $x \in \mathbb{C}^n$ satisface $\|x\|_2 = 1$, entonces existe una matrix unitaria cuya primera columna es x.

30. Sea $\|x\|_2 = 1$ y $U = I - 2xx^*$. Demuestre que $U^2 = I$.

31. Demuestre que $I - xx^* \notin \mathbb{GL}$, ssi $x^*x = 1$. Calcular $(I - xx^*)^{-1}$ simpre que $I - xx^* \in \mathbb{GL}$.

32. Sea u un vector arbitrario y $U = I - \lambda uu^*$. Encuentre todos los valores complejos de λ para los cuales U es unitaria.

33. Si $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una proyección, calcular P^+.

34. Demuestre que si A es Hermitiana A^+ también lo es.

35. Demuestre las siguientes propiedades de la seudoinversa:

    (a) $A^{++} = A$

    (b) $A^{+*} = A^{*+}$

    (c) $(AA^*)^+ = A^{+*}A^+$

    (d) $A^+ = A^*(AA^*)^+$

36. Una matriz A se dice antisimétrica cuando $A^\top = -A$. Demuestre que si A es antisimétrica entonces $x^\top Ax = 0$ para toda x.

37. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, y dados $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Considere la función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por la ecuación

$$Q(x) = c + b^\top x + \frac{1}{2}x^\top Ax, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

probar que:

(a) Probar que $\nabla Q(x) = Ax + b$

(b) Probar que $\mathbb{H}Q(x) = \mathbb{J}\nabla Q(x) = A$

(c) Sea $U \in \mathbb{S}(n)$ determinada por:

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \;\; i = j \\ 2a_{ij} \;\; i < j \\ 0 \;\; i > j \end{cases}$$

Probar que:

$$Q(x) = c + b^\top x + \frac{1}{2}x^\top Ux$$

(d) Probar que $\mathbb{H}Q(z)(x - z) = \nabla Q(x) - \nabla Q(z)$.

38. Calcular el mínimo de $f(x) = (x - 1)e^{-x^2}$ utilizando algún método apropiado de optimización.

39. Considerar las trayectorias descritas por por las curvas paramétricas:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 7\cos(t/3 + \pi/2) + 5 \\ -4\sin(t/3 + \pi/2) - 3 \end{cases}, \gamma_2(t) = \begin{cases} 6\cos(t/6 - \pi/3) - 4 \\ -6\sin(t/6 - \pi/3) + 5 \end{cases}$$

Encontrar la distancia mínima entre los conjuntos $\gamma_1([0, \infty))$ y $\gamma_2([0, \infty))$.

40. Considerar los siguientes conjuntos de datos:

$$T = \{t_j\}_{j=1}^8 = \{0.055, 0.181, 0.245, 0.342, 0.419, 0.465, 0.593, 0.752\}$$
$$Y = \{y_j\}_{j=1}^8 = \{2.80, 1.76, 1.61, 1.21, 1.25, 1.13, 0.52, 0.28\}$$

Encontrar la aproximación de mínimos cuadrados $\phi(t) = x_1 + x_2t + x_3t^2 + x_4e^{-x_5t}$ (con coeficientes $x_1, x_2, \ldots, x_5$) correspondiente a los pares de datos $\{(t_j, y_j)\}_{j=1}^8$.

41. Calcular la ubicación óptima de un almacén para el abastecimiento de tres puntos de venta V_1, V_2, V_3 cuyos conjuntos de coordenadas (en km) y números de entrega por año se detallan a continuación:

$V_1 = (6, 3)$
$N_1 = 140$
$V_2 = (-9, 9)$
$N_2 = 134$
$V_3 = (-8, -5)$
$N_3 = 88$

El almacén debe localizarse dentro de la región $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x - 10\}$

42. Calcular el mínimo del problema de programación cuadrática:

$$\min_{x\in\mathcal{R}} f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + x^\top b$$
$$\mathcal{R} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} Cx - d = 0, \\ Dx - e \geq 0 \end{array} \right\}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = 0, e = 0$$

43. Un punto material se mueve con velocidad $v(x,y) = (\sin(\pi xy) + 1)(2x + 3y + 4)$ a lo largo de una trayectoria elíptica con ecuación $x^2/4 + y^2 = 1$. Encontrar el valor máximo para la velocidad alcanzada por el punto, junto con la posición correspondiente.