

Guía de Práctica - Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Curso de EDPs

February 11, 2025

Instrucciones

Resuelva los siguientes ejercicios utilizando las herramientas y métodos discutidos en clase. Justifique cada respuesta con el análisis adecuado.

Ejercicios

Ejercicios de Identificación de Núcleos

1. Identificar $\ker(\partial_t + c\partial_x) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Identificar $\ker(\partial_x^2 + \partial_y^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ considerando funciones de la forma $\psi(x, y) = \Psi(x^2 + y^2)$ para Ψ en un espacio adecuado de funciones.

Ejercicios de Clasificación de EDPs

3. Clasificar la ecuación $\partial_t u - k\partial_x^2 u = 0$ en términos de:
 - Contexto de aplicaciones físicas.
 - Tipo de operador (lineal o no lineal).
 - Tipo de ecuación (homogénea o no homogénea).
 - Orden de la ecuación.
4. Identificar el tipo de ecuación diferencial parcial para las siguientes ecuaciones:
 - (a) $\partial_t u + u\partial_x u = 0$.
 - (b) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = e^x$.
 - (c) $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$.

Ejercicios de Series de Fourier

5. Calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$.
6. Determinar la serie de Fourier de la función periódica definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L, \\ -1, & -L < x < 0, \end{cases}$$

para $L = 1$.

7. Utilizando el método de separación de variables y series de Fourier. Resolver la ecuación del calor

$$\partial_t \psi - 10\partial_x^2 \psi = 0$$

en el intervalo $[0, L]$ con condiciones de frontera de Neumann homogéneas y condición inicial dada por:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{con } f(x) = 4x(1 - x), \quad 0 < x < L,$$

para $L = 1$.

Ejercicios de Aplicaciones y Estimaciones

9. Considerando el operador de suma truncada de Fourier:

$$\mathcal{F}_N(f) := a_0(f) + \sum_{n=1}^N \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right).$$

- Demostrar que el operador es lineal.
- Especificar condiciones que debe cumplir una función f para que $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}_N(f)$ converja.
- Caracterizar el espacio de funciones $\ker \mathcal{F}_N$.
- Caracterizar el espacio de funciones que cumplen la condición $\mathcal{F}_N(f) = f$.
- Demostrar o refutar que el operador $\mathcal{F}_N$ es idempotente ($\mathcal{F}_N^2 = \mathcal{F}_N$).

10. Utilizando el método de separación de variables y series de Fourier. Resolver la ecuación de onda

$$\partial_t^2 u - 4\partial_x^2 u = 0$$

con condiciones de frontera homogéneas de Neumann en $[0, L]$ y condición inicial dada por:

$$h(x) := 1 - |2x - 1|, \quad \text{con velocidad inicial } u_t(x, 0) = 0,$$

para $L = 1$.