

Guía de Práctica - Examen 2

Curso de EDPs

March 17, 2025

Instrucciones

Resuelva los siguientes ejercicios utilizando las herramientas y métodos discutidos en clase. Justifique cada respuesta con el análisis adecuado.

Ejercicios

Ejercicios de Características y Ecuaciones Hiperbólicas

1. Resolver la ecuación de transporte

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

usando el método de características con condición inicial arbitraria $u(x, 0)$.

2. Resolver la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), t > 0,$$

con condición inicial $u(x, 0)$ y velocidad inicial $u_t(x, 0) = 0$, usando la Transformada de Fourier.

Ejercicios de Ecuaciones Elípticas

3. Utilizando la formulación variacional, demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de Poisson en un dominio acotado.
4. Usar el principio del máximo para demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de Laplace en un dominio acotado.

Ejercicios de Transformada de Fourier

5. Resolver la ecuación del calor en la recta real con condición inicial arbitraria $u(x, 0)$ usando la Transformada de Fourier:

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0.$$

6. Resolver la ecuación de onda en la recta real con condición inicial arbitraria $u(x, 0)$ y velocidad inicial $u_t(x, 0) = 0$ usando la Transformada de Fourier:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0.$$

7. Demostrar que la función

$$\tilde{f} = f + \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}^2(f) + \mathcal{F}^3(f)$$

es un punto fijo de la transformada normalizada de Fourier.

8. Comprobar que la matriz DFT satisface $F_N^4 = I$.