Práctica de Laboratorio: Estimación del Operador de Suma Truncada de Fourier

Fredy Vides

February 13, 2025

1 Introducción

En esta práctica de laboratorio se estudia la representación truncada de la serie de Fourier de una función $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, utilizando el operador de suma truncada de Fourier:

$$\mathcal{F}_N(f) := a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

donde los coeficientes de Fourier se calculan como:

$$a_0(f) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx, \tag{3}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx. \tag{4}$$

2 Metodología

Se utilizará el siguiente código en MATLAB para calcular los coeficientes de Fourier de las funciones de interés, mediante integración numérica:

```
function [a0,a,b,f_hat] = F(f,N,L)
% Representacion truncada de Fourier
% Code by: Fredy Vides
    a0 = integral(f,0,L)/L;
    a = zeros(1,N);
    b = a;
    for n = 1:N
        fc = @(x) f(x).*cos(2*n*pi*x/L);
```

```
        fs = @(x) f(x).*sin(2*n*pi*x/L);
        a(n) = integral(fc,0,L)*2/L;
        b(n) = integral(fs,0,L)*2/L;
    end
    f_hat = @(x) a0 + a*cos(2*pi*(1:N).'*x/L) + b*sin(2*pi*(1:N).'*x/L);
end
```

Las funciones consideradas para la aproximación son:

$$f(x) = 1 - |2x - 1|, \tag{5}$$
$$h(x) = -u(x) + v(x - 0.5) + u(x - 0.5) - v(x - 1), \tag{6}$$

donde las funciones escalón unitario $u(x)$ y $v(x)$ son definidas como:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \tag{7}$$
$$v(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Las funciones anteriores pueden definirse en MATLAB utilizando las siguientes secuencias de comandos:

```
>> f = @(x)1-abs(2*x-1);
>> u = @(x)x>0;
>> v = @(x)x>=0;
>> h = @(x)-u(x) + v(x-0.5) + u(x-0.5) - v(x-1)
```

Los valores de N considerados son $N = 5, 15, 30, 100$, graficando los resultados en el intervalo $[0, 1]$.

3 Sumas Parciales de Fourier Simétricas

Adicionalmente, consideramos la representación truncada de Fourier simétrica de una función $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$, dada por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \tag{9}$$

donde los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \tag{10}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \tag{11}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{12}$$

El siguiente código en MATLAB se utiliza para calcular esta representación:

```
function [a0,a,b,f_hat] = F_s(f,N,L)
% Representacion truncada de Fourier
% Code by: Fredy Vides
    a0 = integral(f,-L,L)/L/2;
    a = zeros(1,N);
    b = a;
    for n = 1:N
        fc = @(x)f(x).*cos(n*pi*x/L);
        fs = @(x)f(x).*sin(n*pi*x/L);
        a(n) = integral(fc,-L,L)/L;
        b(n) = integral(fs,-L,L)/L;
    end
    f_hat = @(x)a0+a*cos(pi*(1:N).'*x/L)+b*sin(pi*(1:N).'*x/L);
end
```

4 Resultados y Análisis

Las representaciones truncadas de Fourier se calculan y grafican usando secuencias de comandos de MATLAB como los que se muestran a continuación:

```
>> [a0,a,b,f_hat5] = F_s(f,5,1)
>> t = 0:1/100:1;
>> plot(t, f(t), 'k', t, f_hat5(t), 'r--');
```

donde la función original $f(x)$ se representa en negro y su aproximación de Fourier truncada en rojo discontinuo.

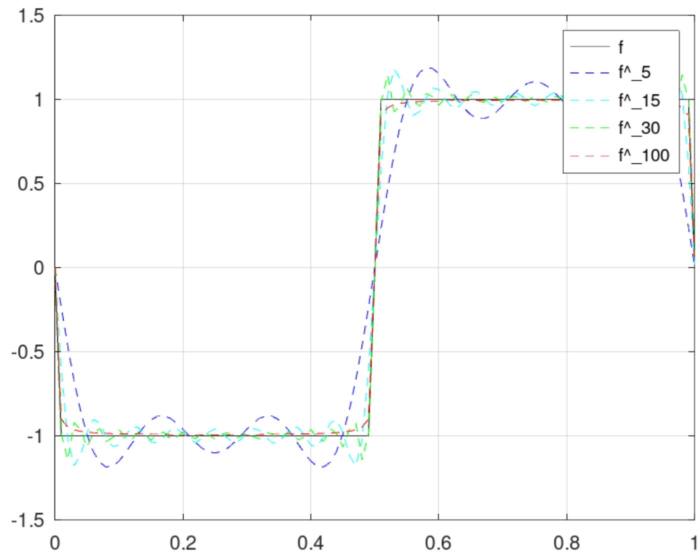

Figure 1: Comparación de la función original h con sus aproximaciones de Fourier $\hat{h}_N := \mathcal{F}_N(h)$ para $N = 5, 15, 30, 100$.

5 Conclusiones

Se observa que a medida que N aumenta, la representación de Fourier se acerca más a la función original. Sin embargo, en discontinuidades se presenta el fenómeno de Gibbs, lo cual es un efecto característico de las aproximaciones de Fourier.