Práctica de Laboratorio:

Identificación de Modelos de 1-Markov con Métodos no Estructurados

Fredy Vides
Departamento de Matemática Aplicada, UNAH

1 Objetivo

El objetivo principal de esta práctica es aplicar los contenidos de las primeras dos semanas del curso de procesos estocásticos a la identificación de sistemas dinámicos lineales de tipo 1-Markov para modelar procesos/cadenas de Markov. Estos sistemas se modelan mediante ecuaciones de la forma:

$$x(t+1) = Ax(t),$$

donde:

- $x(t)$ es el vector de estado en el tiempo t.
- A es una matriz no estructurada.

El enfoque se centra en estimar los coeficientes de la matriz A, utilizando una metodología de estimación paramétrica no estructurada.

2 Actividades de Laboratorio

1. **Definición del Modelo:**
   - Identificar el proceso estocástico de 1-Markov no estructurado correspondiente al modelo epidemiológico de 1-Markov estructurado presentado en [9, §9.3], y determinado por la ecuación en diferencias:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Determinar, empírica, numérica o teóricamente, el grafo de amplitudes de transición que define las interacciones entre los estados del modelo.

2. **Recolección de Datos:**
   - Recolectar una muestra $\{x(0), x(1), \ldots, x(N)\}$ de estados generados del proceso.

3. **Estimación de la Matriz A:**
   - Aplicar la metodología implementada en el ejercicio de laboratorio resuelto de la semana 1, para resolver el problema de mńimos cuadrados no estructurado:

$$A = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^{n \times n}} \left\| X \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x(0) & x(1) & \cdots & x(N-1) \\ | & | & & | \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(N) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \right\|_F^2$$

   - ¿Fue posible estimar una matriz A estocástica, utilizando esta metodología?

4. **Validación del Modelo:**
   - Comparar las predicciones del modelo con datos observados.
   - Evaluar el error entre las amplitudes de transición estimadas y los datos originales del modelo.

3 Entregables

- Reporte técnico de progreso que documente:
  - La matriz de transición A estimada y las validaciones correspondientes.
  - El grafo de interacciones empleado y su interpretación en el contexto del proceso modelado.
- Código utilizado para estimar y validar el modelo.
- Gráficos que representen:
  - El grafo de transiciones entre estados.
  - La evolución temporal de las componentes del vector $x(t)$ estimado, para un horizonte de tiempo que su equipo considere adecuado.

References

[1] Goswami, A. y Rao, B. V. *A Course in Applied Stochastic Processes*. Hindustan Book Agency, 2006.

[2] Ito, Kiyosi. *Essentials for Stochastic Processes*. Association of Mathematical Society, 2006.

[3] Shapiro, A., Dentcheva, D. y Ruszczynski, A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[4] Stroock, D. W. *An Introduction to Markov Processes*. Graduate Texts in Mathematics Series, Springer Verlag, 2005.

[5] Van Kampen, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Third Edition, North Holland, 2007.

[6] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.

[7] Vides, F. *Métodos Numéricos y Modelación Computacional*. Disponible en: `https://fredyvides.github.io/MNMC.pdf`, 2019.

[8] Markovsky, I., Van Huffel, S., Willems, J. C., De Moor, B. *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach*. SIAM, 2005.

[9] Boyd, S., Vandenberghe, L. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.

[10] Quarteroni, A., Saleri, F., Gervasio, P. *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Fourth Edition, Springer, 2014.