Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación

Centro de Innovación en Cónputo Científico **CICC-UNAH**

Lecturas de Modelación Matemática

PRINICIPIOS DE CÓMPUTO DE MODELOS LINEALES APROXIMANTES ESTÁTICOS

Profesor: Dr. Fredy Vides

Índice

1. Principios de Modelos Lineales Aproximantes Estáticos

1.1. Nociones Modelos Lineales Aproximates Estáticos

Definición 1.1. Dadas $X_j \in \mathbb{C}^{n_j \times r}$ para $j = 1, \ldots, n$, en este curso se escribirá $\mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ para denotar la operación determinada por la siguiente expresión.

$$\mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n) := \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Definición 1.2. Dado un conjunto de datos $\mathscr{D}$ correspondientes a resultados de un experimento $\mathbb{E}$, en un conjunto universal $\mathscr{U}$ de posibles resultados. Se denomina modelo aproximante lineal estático correspondiente al experimento $\mathscr{E}$ al conjunto $\mathscr{M}_{\mathbb{E}}$ determinado por la siguiente expresión.

$$\mathscr{M}_{\mathbb{E}} := \{d \in \mathscr{U} : f_E(d) = 0\} \tag{1.1}$$

donde $f_E \in (\mathbb{C}^m)^{\mathscr{U}}$ (f_E es una función de $\mathscr{U}$ a $\mathbb{C}^m$ para algún entero positivo m). La expresión (1.1) recibirá el nombre de representación en este curso.

Notación 1.3. Cuando el experimento $\mathbb{E}$ al que hace referencia un modelo $\mathscr{M}_{\mathbb{E}}$ es claro en el contexto de un problema, se omitirá la referencia explícita a $\mathbb{E}$ en el modelo y se escribirá solamente $\mathscr{M}$ en lugar de $\mathscr{M}_{\mathbb{E}}$.

2. Modelos Lineales Aproximantes Estáticos de la Forma: $Y = AX$

Dados $X \in \mathbb{C}^{n\times r}$ e $Y \in \mathbb{C}^{n\times r}$ es claro que los modelos de la forma $Y = AX$ basados en datos $\mathscr{D}_N := \{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^N \subset \mathscr{U}$ en un universo de resultados $\mathscr{U}$ puede ser representado en términos de datos en un universo $\hat{\mathscr{U}}$ relacionado con $\mathscr{U}$ a través de la relación $\mathrm{col}(Y, X) \in \hat{\mathscr{U}} \Leftrightarrow (Y, X) \in \mathscr{U}$, y de la siguiente representación.

$$\mathscr{M}_{AX} := \left\{\mathrm{col}(Y, X) \in \hat{\mathscr{U}} : \begin{bmatrix} I & -A \end{bmatrix} \mathrm{col}(Y, X) = 0\right\} \tag{2.1}$$

2.1. Mínimos cuadrados y cómputo de modelos lineales estáticos aproximantes de la forma: $Y = AX$

El cómputo de modelos *exactos* $\mathscr{M}_{AX}$ de la forma (2.1) es poco realista, en lugar de una representación exacta de la forma (2.1), en la práctica se consideran representaciones alternativas aproximadas basadas en una muestra $\hat{\mathscr{D}}_N = \{\mathrm{col}(Y_j, X_j)\} \subset \mathscr{U}$ de la forma.

$$\tilde{\mathscr{M}}_{AX} := \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times m} : A = \arg \min_{\hat{A}\in\mathbb{C}^{n\times m}} \sum_{j=1}^{N} \left\| \begin{bmatrix} I & -\hat{A} \end{bmatrix} \mathrm{col}(Y_j, X_j)\right\|_2^2\right\} \tag{2.2}$$

Un razonamiento similar al presentado en la sección [2, §Matrix least squares (pág. 223)] permite obtener el siguiente lema técnico.

Lema 2.1. *Dada una muestra $\hat{\mathscr{D}}_N = \{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^N \subset \mathscr{U}$ en un universo de resultados $\mathscr{U}$ como el considerado previamente. Si se define $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_N \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_N \end{bmatrix}$, entonces $A \in \tilde{\mathscr{M}}_{AX}$, si y solo si $A = YX^+$.*

Demostración. Ejercicio para el lector. □

Ejercicio Resuelto 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por la expresión:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz de datos $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyas columnas han sido generadas al azar verificar (de forma aproximada) computacionalmente el lema 2.1 con respecto al vector de datos $Y = AX$.

Solución. Para realizar esta verificación utilizaremos Octave. Es posible ingresar/generar $A, X, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ utilizando las siguientes secuencias de comandos.

```
>> A=[-2 1 0;1 -2 1;0 1 -2];
>> X=randn(3);
>> Y=A*X;
```

La primer parte de la verificación puede realizarse calculando una matriz $A_1 \in \tilde{\mathscr{M}}_{AX}$ implementando directamente la definición a través programación cuadrática secuencia, utilizando de la siguiente secuencia de comandos:

```
>> phi=@(a)norm(Y-reshape(a,3,3)*X,'fro')^2;
>> [A1,obj,info,iter,nf,lambda]=sqp(zeros(9,1),phi,[],...
> [],[],[],[],1e-12);
>> A1=reshape (A1,3,3)
A1 =

  -1.9999999975692   0.9999999763382   0.0000000408414
   1.0000000020822  -2.0000000226371   1.0000000385234
   0.0000000021409   0.9999999771977  -1.9999999611062
```

Ahora calcularemos $A_1 \in \tilde{\mathscr{M}}_{AX}$ aplicando el lema 2.1 a través de la siguiente secuencia de comandos.

```
>> A2=Y*pinv(X)
A2 =

  -2.0000e+00   1.0000e+00  -4.4409e-16
   1.0000e+00  -2.0000e+00   1.0000e+00
  -6.1062e-16   1.0000e+00  -2.0000e+00
```

Referencias

[1] I. Markovsky, S. Van Huffel, J. C. Willems, B. De Moor (2005). Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach. SIAM.

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe. (2018). Introduction to Applied Linear Algebra Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press.

[3] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio. (2014). Scientific computing with MATLAB and Octave (4thEd). Springer.