Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación
Centro de Innovación en Cónputo Científico **CICC-UNAH**
Lecturas de Modelación Matemática
PRINICIPIOS DE CÓMPUTO DE MODELOS LINEALES APROXIMANTES ESTÁTICOS

Profesor: Dr. Fredy Vides

Índice

1. Modelos Lineales Aproximantes Estáticos de la Forma: $Y = AX + B$

Dados $X \in \mathbb{C}^{m\times r}$ e $Y \in \mathbb{C}^{n\times r}$ es claro que los modelos de la forma $Y = AX + B$ basados en datos $\mathscr{D}_N := \{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^N \subset \mathscr{U}$ en un universo de resultados $\mathscr{U}$ pueden ser representados en términos de datos en un universo $\hat{\mathscr{U}}$ relacionado con $\mathscr{U}$ a través de la relación $\mathrm{col}(Y, X, I_B) \in \hat{\mathscr{U}} \Leftrightarrow (Y, X) \in \mathscr{U}$, y de la siguiente representación,

$$\mathscr{M}_{(A|B)X} := \left\{\mathrm{col}(Y, X) \in \hat{\mathscr{U}} : \begin{bmatrix} I & -A & B \end{bmatrix} \mathrm{col}(Y, X, I_B) = 0\right\} \tag{1.1}$$

donde I_B es determinada de tal forma que $BI_B = B$. Por simplicidad, en este estudio consideraremos la matriz I_B igual a la matriz identidad de $r \times r$ donde r es el entero correspondiente al número de columnas de B, X e Y.

1.1. Mínimos cuadrados y cómputo de modelos lineales estáticos aproximantes de la forma: $Y = AX + B$

Para estudiar la formulación alternativa aproximada de las estrategias de cómputo de modelos *exactos* $\mathscr{M}_{(A|B)X}$ de la forma (1.1), en lugar de una representación exacta de la forma (1.1), iniciaremos considerando representaciones alternativas aproximadas basadas en una muestra $\hat{\mathscr{D}}_N = \{\mathrm{col}(Y_j, X_j)\} \subset \mathscr{U}$ de problemas de la forma.

$$\tilde{\mathscr{M}}_{(A|B)X} := \left\{(A, B) : (A, B) = \arg \min_{(\hat{A},\hat{B}) \in \mathbb{C}^{n\times m}\times\mathbb{C}^{n\times r}} \sum_{j=1}^{N} \left\| \begin{bmatrix} I & -\hat{A} & -\hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \\ I_B \end{bmatrix} \right\|_2^2 \right\} \tag{1.2}$$

Una variación del razonamiento presentado en la sección [2, §Matrix least squares (pág. 223)] permite obtener el siguiente lema técnico.

Lema 1.1. *Dada una muestra $\hat{\mathscr{D}}_N = \{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^N \subset \mathscr{U}$ en un universo de resultados $\mathscr{U}$ como el considerado previamente. Sea $r \in \mathbb{Z}$ el número de columnas de cada X_j. Si se define $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_N \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 & \cdots & \hat{X}_N \end{bmatrix}$ donde $\hat{X}_j = \mathrm{col}(X_j, I_r)$, entonces $(A, B) \in \tilde{\mathscr{M}}_{AX}$, si y solo si $\begin{bmatrix} A|B \end{bmatrix} = YX^+$, donde $[A|B]$ denota la matriz aumentada determinada por las matrices A, B.*

Ejercicio para el lector 1. Demostrar el lema 1.1.

Ejercicio Resuelto 1. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ las matrices definidas por las expresiones:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si se considera el modelo lineal $Y = AX + B$, para $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Dada una muestra $\{(Y_j, X_j) \in \mathbb{R}^{3\times 2} \times \mathbb{R}^{3\times 2}\}_{j=1}^3$ donde las matrices $X_j \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ son generadas al azar y donde $Y_j = AX_j + B$, aproximar computacionalmente el par $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \tilde{\mathscr{M}}_{(A|B)X}$ aplicando el lema 1.1 con respecto la muestra $\{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^3 \mathbb{R}^{3\times 2} \times \mathbb{R}^{3\times 2}\}_{j=1}^3$.

Solución. Para realizar esta cómputo utilizaremos Octave. Es posible ingresar/generar $A, X, Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ utilizando las siguientes secuencias de comandos.

```
>> A=[-2 1 0;1 -2 1;0 1 -2];
>> B=[1 3 -2;1 -1 2].';
>> X=randn(3,6);
>> Y=A*X+repmat(B,1,3);
>> X=[X;repmat(eye(2),1,3)];
```

Ahora es posible calcular $(A_1, B_1) \in \tilde{\mathscr{M}}_{(A|B)X}$ aplicando el lema 1.1 a través de la siguiente secuencia de comandos.

```
>> AB1=Y/X;
>> A1=AB1(:,1:3)
A1 =

  -2.0000e+00   1.0000e+00   1.5821e-15
   1.0000e+00  -2.0000e+00   1.0000e+00
   3.1191e-15   1.0000e+00  -2.0000e+00

>> B1=AB1(:,4:5)
B1 =

   1.00000   1.00000
   3.00000  -1.00000
  -2.00000   2.00000
```

2. Descomposiciones en Valores Singulares en Cómputo Aproximado de Modelos

Si se considera el problema

$$x_{LS} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \tag{2.1}$$

para A, b dados. La descomposición en valores singulares (SVD) permite calcular la solución x_{LS} del problema (2.1) de forma bastance elegante y eficiente, tal como se ilustra en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *[4, Teorema 5.5.1]. Suponiendo que $U^\top AV = \Sigma$ es la SVD de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $r = \mathrm{rk}(A)$. Si $U = [u_1, \ldots, u_m]$ y $V = [v_1, \ldots, v_n]$ son particionamientos de columnnas y $b \in \mathbb{R}^m$, entonces*

$$x_{LS} = \sum_{j=1}^{r} \frac{u_j^\top b}{\sigma_j} v_j \tag{2.2}$$

minimiza $\|Ax - b\|_2$ y tiene la norma-2 más pequeña de todos los minimizadores. Además

$$\|Ax_{LS} - b\|_2^2 = \sum_{j=r+1}^{m} (u_j^\top b)^2. \tag{2.3}$$

Demostración. La demostración está disponible en [4, §5.5.3]. □

2.1. Pseudoinversas y SVD

Con base en el teorema 2.1 es posible observar que la pseudoinversa $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ puede representarse de forma alternativa a través de la expresión

$$A^+ = V\Sigma^+U^\top \tag{2.4}$$

donde

$$\Sigma^+ = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad r = \mathrm{rk}(A)$$

con base en (2.4), (2.2) y (2.3), es posible confirmar que $x_{LS} = A^+b$ y que $\|Ax_{LS} - b\|_2 = \|(I - AA^+)b\|_2$

Ejercicio para el lector 2. Reproducir el experimento correspondiente al **ejercicio resuelto** 1 recalculando los elementos $(A, B) \in \tilde{\mathscr{M}}_{(A|B)X}$ aplicando eficientemente el teorema 2.1 y la identidad (2.4).

Referencias

[1] I. Markovsky, S. Van Huffel, J. C. Willems, B. De Moor (2005). Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach. SIAM.

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe. (2018). Introduction to Applied Linear Algebra Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press.

[3] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio. (2014). Scientific computing with MATLAB and Octave (4thEd). Springer.

[4] Golub, G. H., Van Loan C. F (1996). Matrix Computations (3aEd.). The Johns Hopkins University Press.