

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación

Centro de Innovación en Cómputo Científico CICC-UNAH

Lecturas de Modelación Matemática

PRINCIPIOS DE CÓMPUTO DE MODELOS LINEALES APROXIMANTES ESTÁTICOS

Profesor: Dr. Fredy Vides

Índice

1. Modelos Lineales Aproximantes Estáticos de la Forma: $Y = UX, U^*U = I$	1
1.1. Mínimos cuadrados y cómputo de modelos lineales estáticos aproximantes de la forma: $Y = UX, U^*U = I$	1
2. Estudio de Caso	3

1. Modelos Lineales Aproximantes Estáticos de la Forma: $Y = UX, U^*U = I$

Dados $X \in \mathbb{C}^{n \times r}$ e $Y \in \mathbb{C}^{n \times r}$ es claro que los modelos de la forma $Y = UX, U^*U = I$ basados en datos $\mathcal{D}_N := \{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^N \subset \mathcal{U}$ en un universo de resultados \mathcal{U} puede ser representado en términos de datos en un universo $\hat{\mathcal{U}}$ relacionado con \mathcal{U} a través de la relación $\text{col}(Y, X) \in \hat{\mathcal{U}} \Leftrightarrow (Y, X) \in \mathcal{U}$, y de la siguiente representación.

$$\mathcal{M}_{UX} := \left\{ \text{col}(Y, X) \in \hat{\mathcal{U}} : \begin{bmatrix} I & -U \end{bmatrix} \text{col}(Y, X) = 0, U^*U = I \right\} \quad (1.1)$$

1.1. Mínimos cuadrados y cómputo de modelos lineales estáticos aproximantes de la forma: $Y = UX, U^*U = I$

El cómputo de modelos *exactos* \mathcal{M}_{UX} de la forma (1.1) es poco realista, en lugar de una representación exacta de la forma (1.1), en la práctica se consideran representaciones alternativas aproximadas basadas en una muestra $\hat{\mathcal{D}}_N = \{\text{col}(Y_j, X_j)\} \subset \mathcal{U}$ de la forma.

$$\tilde{\mathcal{M}}_{UX} := \left\{ U \in \mathbb{C}^{n \times m} : U = \arg \min_{\substack{\hat{U} \in \mathbb{C}^{n \times m} \\ \hat{U}^* \hat{U} = I}} \sum_{j=1}^N \left\| \begin{bmatrix} I & -\hat{U} \end{bmatrix} \text{col}(Y_j, X_j) \right\|_2^2 \right\} \quad (1.2)$$

Un razonamiento similar al presentado en la sección [2, §Matrix least squares (pág. 223)] permite obtener el siguiente lema técnico.

Lema 1.1. Dada una muestra $\hat{\mathcal{D}}_N = \{(Y_j, X_j)\}_{j=1}^N \subset \mathcal{U}$ en un universo de resultados \mathcal{U} como el considerado previamente. Si se define $Y = [Y_1 \ \cdots \ Y_N]$ y $X = [X_1 \ \cdots \ X_N]$, entonces $U \in \tilde{\mathcal{M}}_{UX}$, si y solo si $U = WV^*$ para $W\Sigma V^* = YX^+$.

Demostración. Ejercicio para el lector.

Idea: Aplicar ideas implementadas en el caso de modelos \mathcal{M}_{AX} (sin restricciones adicionales para A), junto con una variación para matrices complejas de las técnicas presentadas en [4] para resolver el problema *orthogonal Procrustes problem* determinado por la expresión.

$$Q = \arg \min_{\hat{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m}} \|A - B\hat{Q}\|_F$$

$$\hat{Q}^\top \hat{Q} = I$$

□

Ejemplo 1. Compresión de una señal con ruido aleatorio. Considerando una muestra de una señal de la forma $\{y_t\}_{t=1}^{101}$ donde $y_t = \sin(2\pi(t-1)/100) + r_t$ para r_t un parámetro de simulación de ruido pseudoaleatorio. Una muestra de esta forma puede simularse en Octave con la siguiente secuencia de comandos.

```
>> t=0:1/100:1;
>> y=sin(2*pi*t)+.5e-1*randn(1,101);
>> plot(t,y,'k.-')
```

la representación gráfica de la muestra de la señal se ilustra en la fig. 1.1.

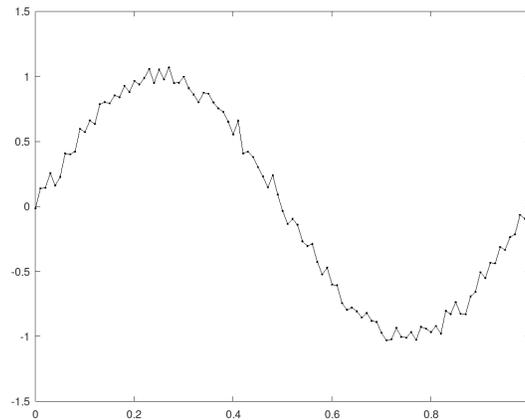


Figura 1.1: Representación gráfica de la muestra de la señal.

La transformada discreta de Fourier de la señal puede calcularse utilizando la siguiente secuencia de comandos.

```
>> Y=fft(y)/sqrt(101);
```

Si consideramos los elementos en el espectro de la señal correspondiente al umbral $\mathcal{U} = \{1 \leq t \leq 101 : |Y_t| > 0,2\}$. Es posible aplicar Octave para calcular el umbral y extraer la representación comprimida $\tilde{y}_t = \sum_{t \in \mathcal{U}} Y_t F_t$ de la señal, donde F_t es la t -ésima columna de la matriz de transformación discreta de Fourier correspondiente.

```
>> f=find(abs(Y)>.2);
>> Yr=Y(f)';
>> W=dftmtx(101)/sqrt(101);
>> W=W(f,:)';
>> plot(t,W*Yr,'k.-',t,Y,'r.-')
```

la representación gráfica de la compresión de la señal se ilustra en la fig. 1.2.

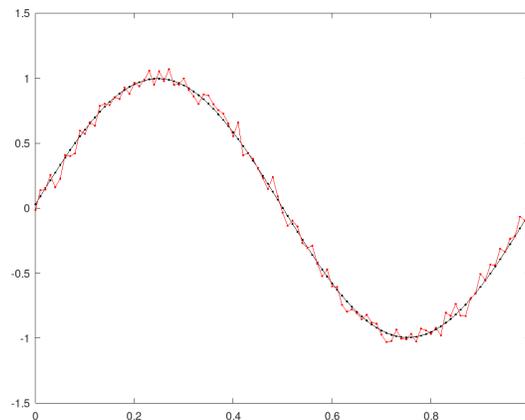


Figura 1.2: Representación gráfica de compresión de la muestra de la señal.

La siguiente secuencia de comandos de Octave permite calcular el error $\|W^*W - I\|_F$.

```
>> norm(W'*W-eye(size(W,2)),'fro')
ans = 3.1404e-16
```

2. Estudio de Caso

Considerando el modelo genérico \mathcal{M}_{UX} , remitir una propuesta de demostración del lema 1.1, o una implementación del modelo genérico en la solución de un problema de aplicación, por ejemplo en compresión de señales, desarrollando un algoritmo/programa que permita identificar la matriz W en el modelo \mathcal{M}_{Uz} , $z \in \mathbb{C}^{r \times 1}$ correspondiente al ejemplo 1.

Referencias

- [1] I. Markovsky, S. Van Huffel, J. C. Willems, B. De Moor (2005). Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach. SIAM.

- [2] S. Boyd, L. Vandenberghe. (2018). Introduction to Applied Linear Algebra Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press.
- [3] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio. (2014). Scientific computing with MATLAB and Octave (4thEd). Springer.
- [4] Golub, G. H., Van Loan C. F (1996). Matrix Computations (3aEd.). The Johns Hopkins University Press.