Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación

Centro de Innovación en Cónputo Científico **CICC-UNAH**

Lecturas de Modelación Matemática

PRINCIPIOS DE HOMOTOPÍAS Y CÓMPUTO DE ÍNDICES DE BUCLES EN $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ CON APLICACIONES

Profesor: Dr. Fredy Vides

Índice

1. Principios de Homotopías y Cómputo de Índices de Bucles en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

1.1. Principios de Homotopías

Notación 1.1. Dados dos conjuntos X, Y escribiremos Y^X para denotar el sub-conjunto de $X \times Y$ determinado por el conjunto de todas las funciones de X a Y.

Notación 1.2. Dados dos espacios métricos (topológicos) se denota por $C(X, Y)$ el conjunto de funciones continuas de X a Y.

Definición 1.3. Un espacio métrico (topológico) X se denomina conexo por trayectorias o CPT si para cada $x, x' \in X$, existe $\gamma \in C([0,1], X)$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = x'$.

Definición 1.4. Dados dos espacios topológicos X, Y y dadas $f_0, f_1 \in C(X, Y)$, una **homotopía** de f_0 a f_1 es una familia (**net**) de funciones $\{\hat{f}_t\}_{t\in[0,1]} \subset C(X, Y)$ tal que $\hat{f}_0 = f_0$ y $\hat{f}_1 = f_1$.

Observación 1.5. Con base en la definición previa es posible observar que dados dos espacios topolóficos, una homotopía entre dos mapas $f, g \in C(X, Y)$ puede interpretarse como una función $h \in C(X \times [0,1], Y)$ tal que.

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x,s) \in Y,\ s \in [0,1] \\ h(x,0) = f(x) \\ h(x,1) = g(x) \end{array} \right. ,\quad x \in X \tag{1.1}$$

Homotopías entre mapas arbitrarios f, g que solamente complen la condición (1.1) se denominan **homotopías libres**, dado que las únicas restricciones están dadas por la continuidad de $h : X \times [0,1] \to Y$ y por (1.1).

Suposición 1.6. Dada la importancia del espacio topológico $[0,1] \subset \mathbb{R}^1$ en el trabajo de clasificación de espacios topológicos correspondiente a este curso, a partir de este punto se asumirá cierto (sin necesidad de verificación/demostración) que $[0,1]$ **es un sub-conjunto compacto del espacio topológico** $\mathbb{R}^1$ (con respecto a la topología métrica usual inducida por la métrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinada por $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in R$).

En el caso de mapas (trayectorias) en $C([0,1], X)$ en un espacio topológico X, además de homotopías libres, se considerarán homotopías con algunas restricciones adicionales. Un ejemplo gráfico de homotopía libre entre dos trayectorias en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ se ilustra en la fig. 1.1.

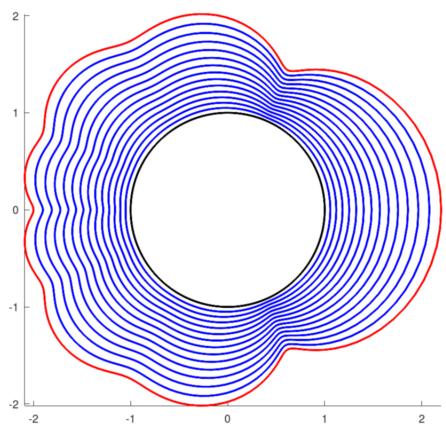

Figura 1.1: Ilustración gráfica de una homomtopía libre $\{f_s\}_{s\in[0,1]} \subset C([0,1], \mathbb{C}\backslash\{0\})$ en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ entre dos trayectorias $\gamma : [0,1] \to \mathscr{S}$ (representada por curva coloreada en negro) y $\gamma_p = p \circ \gamma : [0,1] \to p(\mathscr{S})$ (representada por curva coloreada en rojo), para $\mathscr{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$ para $t \in [0,1]$, $p \in \mathbb{C}[z]$ definido por $p(z) = \frac{1}{10}z^8 + \frac{1}{10}z^7 + \frac{1}{10}z^6 + \frac{1}{10}z^5 + \frac{1}{10}z^4 + \frac{1}{10}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{9}{5}z - \frac{7}{10}$ y $f_s(t) = \frac{\gamma_p(t)}{|\gamma_p(t)|^s}$, $0 \leq s, t \leq 1$.

Observación 1.7. Es importante observar que la expresión$f_s(t) = \frac{\gamma_p(t)}{|\gamma_p(t)|^s}$, $0 \leq s, t \leq 1$ define una homotopía dado que $\gamma([0,1]), \gamma_p([0,1]) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ de manera que $0 \notin \gamma([0,1]), \gamma_p([0,1])$, si no se considera esta restricción para los rangos de γ, γ_p la expresión $f_t(s)$ podría no estar bien definida y no podría definir una homotopía. Esta es una de las razones por las que el conjunto en el que se está considerando la homotopía es importante.

1.2. Trayectorias Homotópicas

Definición 1.8. Dadas dos trayectorias $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], X)$ en un espacio topológico X tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, se define una homotopía con puntos extremos fijos como una homotopía $\{\hat{\gamma}_t\}_{t\in[0,1]} \subset C([0,1],X)$ que cumple las siguiente restricciones.

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_s(t) \in X \\ \hat{\gamma}_s(0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \\ \hat{\gamma}_s(1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \quad , \quad s,t \in [0,1] \\ \hat{\gamma}_0(t) = \gamma_0(t) \\ \hat{\gamma}_1(t) = \gamma_1(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

Notación 1.9. Dadas dos trayectorias $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1],X)$ en un espacio topológico X, se escribirá que γ_0, γ_1 son **homotópicas con puntos extremos fijos** si $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ y si existe una homotopía $\{\hat{\gamma}_t\}_{t\in[0,1]} \subset C([0,1],X)$ que cumple las restricciones (1.2), la condición de γ_0, γ_1 de ser homotópicas con puntos extremos fijos se denotará de forma abreviada en este curso como $\gamma_0 \sim_h \gamma_1$.

Un ejemplo gráfico de homotopía con puntos extremos fijos entre dos trayectorias en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ se ilustra en la fig. 1.2.

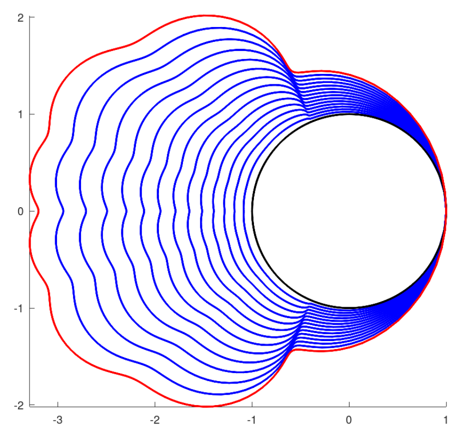

Figura 1.2: Ilustración gráfica de una homomtopía con puntos extremos fijos $\{f\}_{s\in[0,1]} \subset C([0,1],\mathbb{C}\backslash\{0\})$ en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ entre dos trayectorias $\gamma : [0,1] \to \mathscr{S}$ (representada por curva coloreada en negro) y $\gamma_p : [0,1] \to p(\mathscr{S})$ (representada por curva coloreada en rojo), para $\mathscr{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$ para $t \in [0,1]$, $p \in \mathbb{C}[z]$ definido por $p(z) = \frac{1}{10}z^8 + \frac{1}{10}z^7 + \frac{1}{10}z^6 + \frac{1}{10}z^5 + \frac{1}{10}z^4 + \frac{1}{10}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{9}{5}z - \frac{7}{10}$, $\gamma_p(t) = p(\exp(2\pi i t)) - p(1) + 1$ para $t \in [0,1]$ y $f_s(t) = \frac{\gamma_p(t)}{|\gamma_p(t)|^s}$, $0 \leq s,t \leq 1$.

Lema 1.10. *La relación $\sim_h$ es una relación de equivalencia entre trayectorias en un espacio topológico.*

Demostración. Sea X un espacio topológico. Dada $\alpha \in C([0,1],X)$, es claro que la familia de funciones $\{\alpha_t\}_{t\in[0,1]} \subset X^{[0,1]}$ definida por $\alpha_t(s) = \alpha(s)$ para cada $t,s \in [0,1]$ es una homotopía de α a α. En efecto, $\alpha_t = \alpha \in C([0,1],X)$ para cada $t \in [0,1]$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha$ y $\alpha_t(0) = \alpha(0)$ y $\alpha_t(1) = \alpha(1)$ para cada $t \in [0,1] \Longrightarrow \alpha \sim_h \alpha$.

Dadas $\alpha, \beta \in C([0,1], X)$ tales que $\alpha \sim_h \beta$, se cumple que existe una homotopía con puntos extremos fijos $\{\hat{\alpha}_t\}_{t\in[0,1]} \subset C([0,1], X)$ de α a β. Es claro con base en la definición de la operación $\sim_h$ que la familia $\{\hat{\alpha}_{1-t}\}_{t\in[0,1]} \subset C([0,1], X)$ define una homotopía de β a $\alpha \Longrightarrow \beta \sim_h \alpha$.

Dadas $\alpha, \beta, \gamma \in C([0,1], X)$ tales que $\alpha \sim_h \beta$ y $\beta \sim_h \gamma$, se cumple que existen homotopías con puntos extremos fijos $\{\hat{\alpha}_t\}_{t\in[0,1]}, \{\hat{\beta}_t\}_{t\in[0,1]} \subset C([0,1], X)$ de α a β y de β a γ, respectivamente. Es claro con base en la definición de la operación $\sim_h$ que la familia $\{\hat{\gamma}_t\}_{t\in[0,1]} \subset C([0,1], X)$ determinada por la expresión

$$\hat{\gamma}_t(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}_{2t}(s), & t \in [0, 1/2] \\ \hat{\beta}_{2t-1}(s), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

define una homotopía de α a $\gamma \Longrightarrow \alpha \sim_h \gamma$. Los argumentos previos implican que la relación $\sim_h$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto $\sim_h$ es una relación de equivalencia. $\square$

Notación 1.11. Dada una trayectoria $\alpha \in C([0,1], X)$ en un espacio topológico X, en este curso se escribirá $[\alpha]_h$ para denotar la clase de equivalencia (de homotopía) de α, la cual está determinada por la expresión $[\alpha]_h = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma \sim_h \alpha\}$.

Tanto en la fig. 1.1 como en la fig. 1.2 se ilustran tipos de trayectorias que jugarán un papel fundamental en el trabajo de clasificación de espacios topológicos correspondiente a este curso.

Definición 1.12. Dado un espacio topológico X y un punto $x \in X$. Una trayectoria $\gamma \in C([0,1], X)$ se denomina un **bucle** o **lazo** en X con base en x, si $\gamma(0) = x = \gamma(1)$. El conjunto de todos los bucles en X con base en x se denotará por $\pi(X, x)$ en este curso.

Observación 1.13. Dado un espacio topológico X y dado $x \in X$. Es claro que $\pi(X, x) = \{\alpha \in C([0,1], X) : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$

Notación 1.14. Dados dos espacios topológicos X, Y y $y \in Y$, en este curso se escribirá $\hat{y}$ para denotar la función $\hat{y} : X \to Y$ definida por $\hat{y}(x) = y$ para cada $x \in X$.

1.3. Algunas propiedades del cómputo de índices en $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$

Notación 1.15. $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Notación 1.16. $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1) = \pi(\mathbf{S}^1, 1)/\sim_h = \{[\alpha]_h : \alpha \in \pi(\mathbf{S}^1, 1)\}$.

Definición 1.17. Dada $\omega \in C([0,1], \mathbb{C})$ tal que $\omega(0) = \omega(1)$ y dado $z_0 \in \mathbb{C}$, el **número de giros** o **índice** de ω con respecto a z_0 se define como el número entero correspondiente a la expresión.

$$N_{z_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} \frac{dz}{z - z_0}$$

Observación 1.18. Es importante observar que la integral correspondiente al índice $N_{z_0}(\omega)$ debe calcularse en el sentido positivo (anti-horario) de recorrido de $\omega([0,1])$.

Definición 1.19. Dada $\omega \in C([0,1], \mathbf{S}^1)$ en $\mathbf{S}^1$ tal que $\omega(0) = \omega(1) = 1$, se define el índice $\mathrm{ind}([\omega]_h)$ de $[\omega]_h$, como el número entero definido por la expresión $\mathrm{ind}([\omega]_h) = N_0(\omega)$.

Propiedad 1.20. *Dadas $[\alpha]_h, [\beta]_h \in \pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$ el cómputo de índices en $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{ind} : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ *está bien definida.*
2. $\mathrm{ind}([\alpha]_h) = \mathrm{ind}([\beta]_h) \Longrightarrow [\alpha]_h = [\beta]_h$.
3. *Dado $z \in \mathbb{Z}$ existe $[\omega_z]_h \in \pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$ tal que* $\mathrm{ind}([\omega_z]_h) = z$.

Observación 1.21. Es importante observar que la función ind está bien definida en $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1)$, antes de calcular el índice de un elemento de un grupo fundamental dado, es importante determinar si la operación podría estar definida.

Definición 1.22. Dado $S \subset \mathbb{R}$, se dice que $f \in C(S, \mathbb{C}\backslash\{0\})$ está topológicamente controlado por $\mathbf{S}^1$ si existe $p_f \in C(\mathbf{S}^1, \mathbb{C}\backslash\{0\})$ tal que p_f *resuelve* el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{S}^1 \arrow[d, dashed, "p_f"] \\ S \arrow[ur, "\exp(2\pi i\cdot)"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}\backslash\{0\} \end{tikzcd}$$

1.4. Proyectos Computacionales

Para desarrollar las siguientes prácticas de laboratorio, es recomendable instalar el programa GNU Octave en su versión 5.2.0 disponible en la dirección `https://www.gnu.org/software/octave/download.html`.

1.4.1. Visión Computarizada y Detección de movimiento periódico

En esta sección se resolverá el problema correspondiente al desarrollo de un algoirtmo topológico elemental de visión computacional asistida y detección de movimiento periódico. Este algoritmo topológico basado en la función $\mathrm{ind} : \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ permite a la coputadora detectar el movimiento periódico observado a través de una secuencia de imágenes que simulan un proceso de visión computacional asistida. Para este propósito se utilizará el programa `PMotionID.m` desarrollado por Fredy Vides como parte del proyecto **ACRPkG** actualmente en desarrollo en el **CICC-UNAH**.

El código Octave del programa `PMotionID.m` se muestra a continuación.

```
function [Wt,Wtr,T]=PMotionID(N,M,tol)
% Programador: Fredy Vides
% Proyecto: ACRPkG/CICC-UNAH 2020
% Example:
% [Wt,Wtr,T]=PMotionID(33,200,1e-11);
t=0:2/(N-1):2;
```

```
x=-1:2/(M-1):1;
z=@(t)cos(2*pi*t).*(1-x.^2).^3;
for k=1:N
plot(x,z(t(k)),'linewidth',5,[-1 1],[0 0],'r.','markersize',20);
axis ([-1 1 -1 1]);
axis square;
axis off;
print("-dpng",['wave-',num2str(k),'.png']);
end
W=double(imread (['wave-1.png']));
imshow(uint8(W));
pause(.1);
R=sparse(size(W,1),size(W,2));
W=W(:,:,1);
DW =del2(W);
f=find(DW);
Wr=R;
Wr(f)=W(f);
Wt=Wr(:);
for k=2:N
W=double(imread (['wave-',num2str(k),'.png']));
imshow(uint8(W));
pause(.1);
W=W(:,:,1);
DW =del2(W);
f=find(DW);
Wr=R;
Wr(f)=W(f);
Wt=[Wt Wr(:)];
end
[u,s,~]=svd(Wt,0);
s=diag(s)';
f=find(s>=tol);
Wtr=u(:,f)'*Wt;
wt=abs(fft(Wtr(1,:)))/sqrt(N);
Th=min(wt);
f=find(wt>=Th);
F=@(z)(z.^(floor(N/f(2))))/sqrt(N);
T=NGiros(F,0,N);
end
```

El programa `PMotionID.m` aplica el programa Octave `NGiros.m` para calcular el índice del bucle elemental de identificación correspondiente. El código del programa `NGiros.m` se muestra a continuación.

```
function N=NGiros(f,z0,n)
```

```
%%
% Programador: Fredy Vides
% Proyecto: ACRPkG/CICC-UNAH 2020
% Example:
% f=@(x)polyval([.1 .1 .1 .1 .1 .1 .5 1.8 -.7],x);
% N=NGiros(f)
%%
if nargin<2
n=14;
z0=0;
end
if n<=1, n=2;end
t=0:1/n:1;
z=exp(2*pi*i*t(1:n));
pf=polyfit(z,f(z),n);
dpf=polyder(pf);
dpf=@(t)(exp(2*pi*i*t).*polyval(dpf,exp(2*pi*i*t)))./...
(polyval(pf,exp(2*pi*i*t))-z0);
N=real(quadl(dpf,0,1,1e-14));
```

Un ejemplo de ejecución del programa `PMotionID.m` se muestra a continuación.

```
>> [Wt,Wtr,T]=PMotionID(33,200,1e-11);
>> T
T =  16.000
```

1.4.2. Identificación Dinámica en $\mathbf{S}^1_{GT} = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)| = 1\}$ topológicamente controlada por $\mathbf{S}^1$

En esta sección se utiliza el programa Octave `SystemIDTG.m` desarrollado por Fredy Vides como parte del proyecto **ACRPkG**, con el propósito de identificar dinámica topológica periódica en el subespacio topológico $\mathbf{S}^1_{GT} = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1\} \subset \mathbb{C}$. El programa requiere la aplicación del programa `NGiros.m` previamente descrito, y requiere también la implementación de una función Octave que permita calcular el mapeo $\mathscr{S} : (\mathbf{S}^1_{GT}, 1) \to (\mathbf{S}^1, 1)$, la implementación computational de Octave de $\mathscr{S}$ ha sido implementada por Fredy Vides como el programa Octave `S1gt.m`, pero el código no se comparte en este punto dado que el cálculo y la implementación computacional en Octave del mapa $\mathscr{S} : (\mathbf{S}^1_{GT}, 1) \to (\mathbf{S}^1, 1)$ es un **ejercicio para el lector**.

El código Octave del programa `SystemIDTG.m` se muestra a continuación.

```
function [Zr,Ind]=SystemIDTG(I,T,N)
% Programador: Fredy Vides
% Proyecto: ACRPkG/CICC-UNAH 2020
% Examples:
% [Z,Ind]=SystemIDTG([0 .5],2,101);
% [Z,Ind]=SystemIDTG([0 1],2,201);
```

```
f = @(t)S1gt(exp(2*pi*i*T*t));

dI=diff(I);
t=I(1):dI/(N-1):I(2);

S1GT=f(t);

S1r=S1GT./abs(S1GT);

S1r0=S1r(1:(N-1));
S1r1=S1r(2:N);
Zr=S1r1/S1r0;
F=@(z)z.^floor((N*angle(Zr))/(2*pi*dI));

Ind=NGiros(F,0,floor(N/10));

S1GTr=S1gt(F(exp(2*pi*i*t)));

for k=1:N
subplot(121);
Z=S1GT(1:k);
plot(real(Z),imag(Z),'b','linewidth',4,...
real(Z(1)),imag(Z(1)),'g.','markersize',...
24,real(Z(k)),imag(Z(k)),'r.','markersize',24);
axis ([-1 1 -1 1]);
axis square;
title('DinÃ¡mica observada')
pause(.1);
subplot(122);
Z=S1GTr(1:k);
plot(real(Z),imag(Z),'b','linewidth',4,...
real(Z(1)),imag(Z(1)),'g.','markersize',...
24,real(Z(k)),imag(Z(k)),'r.','markersize',24);
axis ([-1 1 -1 1]);
axis square;
title('DinÃ¡mica identificada')
pause(.1);
end
end
```

Un ejemplo de implementación del programa `SystemIDTG.m` se muestra a continuación.

```
>> [Z,Ind]=SystemIDTG([0 1],2,201);
>> Ind
```

```
Ind =  2.0000
```

Una de las salidas gráficas producidas por el programa `SystemIDTG.m` se ilustra en la fig. 1.3.

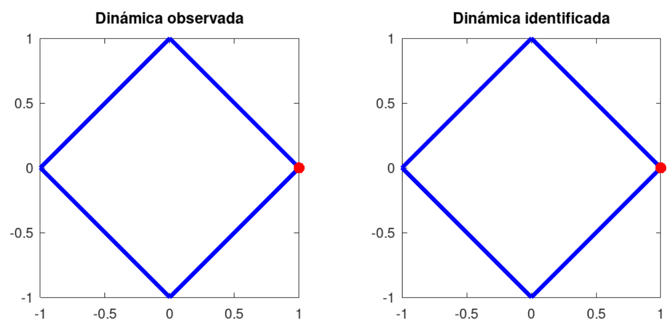

Figura 1.3: Salida gráfica del programa `SystemIDTG.m`.

Ejercicios Adicionales para el Lector

Ejercicio para el lector 1. Adaptar el código `SystemIDTG.m` para desarrollar un programa Octave para realizar identificación de dinámica periódica en el espacio $\mathbf{S}^1_{max} = \{z \in \mathbb{C} : \max\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\} = 1\}$.

Ejercicio para el lector 2. Adaptar el código `SystemIDTG.m` para desarrollar un programa Octave para realizar identificación de dinámica periódica en el espacio $\mathbf{S}^1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$.

Ejercicio para el lector 3. Adaptar el código `SystemIDTG.m` para desarrollar un programa Octave para realizar identificación de dinámica periódica en el espacio $\mathbf{S}^1_{GT,\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$.

Referencias

[1] A. Hatcher. (2001). Algebraic Topology. Electronic version.

[2] J. R. Munkres. (2002). Topología (2a Ed). Prentice Hall.

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe. (2018). Introduction to Applied Linear Algebra Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press.

[4] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio. (2014). Scientific computing with MATLAB and Octave (4thEd). Springer.