Semana 10: Transformada de Laplace y Problemas de Valor Inicial

Curso de EDPs

March 24, 2025

Objetivo de la Semana 10

- Introducir la transformada de Laplace como herramienta para resolver EDPs.
- Aplicar la transformada de Laplace a problemas de valor inicial.
- Resolver ecuaciones de calor y de onda utilizando esta técnica.

Transformada de Laplace: Definición

Para una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Propiedades útiles:

- $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$
- $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

Aplicación a EDPs: Estrategia General

1. Aplicar la transformada de Laplace en la variable temporal t.
2. Resolver la ecuación resultante (una ecuación diferencial ordinaria en el espacio).
3. Aplicar condiciones de frontera y resolver el problema.
4. Aplicar la transformada de Laplace inversa para recuperar la solución original.

Ejemplo: Ecuación del Calor con Condiciones Iniciales

$$
\begin{aligned}
&u_t = k u_{xx}, \quad x \in (0, L), \ t > 0, \\
&u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(L, t) = 0.
\end{aligned}
$$

Aplicamos transformada de Laplace en t:

$$s\hat{u}(x, s) - f(x) = k\hat{u}_{xx}(x, s),$$

lo que resulta en una ecuación ODE que se resuelve con condiciones de frontera y se aplica la inversa de Laplace.

Ejemplo: Ecuación de Onda con Condiciones Iniciales

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), \ t > 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Transformada de Laplace:

$$s^2 \hat{u}(x, s) - sf(x) - g(x) = c^2 \hat{u}_{xx}(x, s),$$

se obtiene una ecuación elíptica en x que se resuelve con las condiciones de frontera y luego se aplica $\mathcal{L}^{-1}$.

Ventajas del Método de Laplace

- Reduce el problema en derivadas parciales a una ecuación ordinaria.
- Maneja naturalmente las condiciones iniciales.
- Proporciona un enfoque sistemático para resolver problemas de valor inicial.

Ejercicios Propuestos

1. Resolver la ecuación del calor en $x \in (0, \pi)$ con condición inicial $u(x, 0) = \sin(x)$, condiciones de Dirichlet homogéneas.
2. Resolver la ecuación de onda con condición inicial $u(x, 0) = \sin(x)$, velocidad inicial nula, condiciones de Dirichlet homogéneas.
3. Aplicar la transformada de Laplace a un problema con condición inicial tipo escalón y describir su comportamiento.