Semana 11: EDPs No Lineales y Fenómenos Emergentes

Curso de EDPs

March 31, 2025

Objetivo de la Semana 11

- Introducir ecuaciones diferenciales parciales no lineales y su relevancia en modelos físicos.
- Comprender fenómenos como ondas de choque y solitones.
- Aplicar métodos cualitativos y numéricos para analizar el comportamiento de soluciones.

¿Qué es una EDP No Lineal?

Una ecuación es no lineal si la función desconocida u o sus derivadas aparecen de manera no lineal:

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, \ldots) = 0,$$

con F no lineal en sus argumentos.

Ejemplos:

- Ecuación de Burgers: $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$
- Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV): $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$

Ondas de Choque

- Surgen en ecuaciones como $u_t + uu_x = 0$ cuando soluciones suaves desarrollan discontinuidades en tiempo finito.
- Se estudian usando soluciones en sentido débil y condiciones de salto.
- Modelo de ecuaciones de conservación:

$$u_t + f(u)_x = 0$$

con soluciones **discontinuas** admisibles si satisfacen la condición de Rankine-Hugoniot.

Condición de Rankine-Hugoniot

Para una solución con salto en u, la velocidad de la discontinuidad s satisface:

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L},$$

con u_L, u_R los valores a la izquierda y derecha del salto.

Solitones y la Ecuación de KdV

- Soluciones que viajan sin deformarse.
- Modelo: ecuación de KdV:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

- Tiene soluciones tipo pulso:

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right),$$

donde $c > 0$ es la velocidad de propagación.

Métodos Cualitativos

- Análisis de fases para sistemas reducidos a ODEs.
- Estabilidad de soluciones estacionarias.
- Conservación de cantidad de movimiento o energía en algunos modelos.
- Estudio numérico para visualizar interacción de ondas.

Ejercicio de Laboratorio

```
% Solución de la ecuación KdV: u_t + uu_x + u_xxx = 0 en [-pi,pi] por
%          FFT con factor integrante v = exp(-ik^3t)*u-hat.

% Código basado en el programa p27.m desarrollado por L. N. Trefethen
% como parte del material didáctico complementario de para su libro
% Spectral Methods in MATLAB.

% Definición de malla y datos de condición inicial para dos solitones:
function KdV_eq_FFT(N)
  % N = 256;
  dt = .4/N^2; x = (2*pi/N)*(-N/2:N/2-1)';
  A = 25; B = 16; clf, drawnow
  u = 3*A^2*sech(.5*(A*(x+2))).^2 + 3*B^2*sech(.5*(B*(x+1))).^2;
  v = fft(u); k = [0:N/2-1 0 -N/2+1:-1]'; ik3 = 1i*k.^3;

% Resolver EDP y graficar resultados:
  tmax = 0.006; nplt = floor((tmax/25)/dt); nmax = round(tmax/dt);
  udata = u; tdata = 0; h = waitbar(0,'please wait...');
  for n = 1:nmax
    t = n*dt; g = -.5i*dt*k;
    E = exp(dt*ik3/2); E2 = E.^2;
    a = g.*fft(real( ifft(     v     ) ).^2);
    b = g.*fft(real( ifft(E.*(v+a/2)) ).^2);      % Runge-Kutta
    c = g.*fft(real( ifft(E.*v + b/2) ).^2);      % 4to-orden
    d = g.*fft(real( ifft(E2.*v+E.*c) ).^2);
    v = E2.*v + (E2.*a + 2*E.*(b+c) + d)/6;
    if mod(n,nplt) == 0
      u = real(ifft(v)); waitbar(n/nmax)
      udata = [udata u]; tdata = [tdata t];
    end
  end
  waterfall(x,tdata,udata'), colormap(1e-6*[1 1 1]); view(-20,25)
  xlabel x, ylabel t, axis([-pi pi 0 tmax 0 2000]), grid off
  set(gca,'ztick',[0 2000]), close(h), pbaspect([1 1 .13])
endfunction
```

Ejercicios Propuestos

1. Calcular la velocidad de una discontinuidad usando la condición de Rankine-Hugoniot para $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.
2. Verificar que una función tipo impulso satisface la ecuación de KdV.