Semana 3: Método de Separación de Variables

Curso de EDPs

February 10, 2025

Objetivo de la Semana 3

- Introducir el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales.
- Aplicar el método a ecuaciones clásicas como la ecuación de calor y la ecuación de onda.
- Comprender la importancia de la expansión en series de Fourier en la solución de EDPs.

Idea del Método de Separación de Variables

Suposición fundamental: Se busca una solución en la forma de un producto de funciones de una sola variable:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Sustituyendo en la EDP, se obtiene una ecuación separable en términos de $X(x)$ y $T(t)$. Esto lleva a dos ecuaciones ordinarias.

Ejemplo 1: Ecuación de Calor

Consideremos la ecuación de calor unidimensional:

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Condiciones:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

Aplicamos separación de variables: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Se obtienen las ecuaciones:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + k\lambda T = 0.$$

Solución del Problema de Calor

Las soluciones de $X(x)$ son funciones seno:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Las soluciones de $T(t)$ son:

$$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde los coeficientes b_n se determinan mediante la serie de Fourier de $f(x)$.

Ejemplo 2: Ecuación de Onda

Consideremos la ecuación de onda:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Condiciones:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Aplicamos separación de variables y obtenemos:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + c^2 \lambda T = 0.$$

Solución del Problema de Onda

Las soluciones de $X(x)$ son:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Las soluciones de $T(t)$ son:

$$T_n(t) = A_n \cos(c\lambda_n t) + B_n \sin(c\lambda_n t).$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(c(n\pi/L)t) + B_n \sin(c(n\pi/L)t)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Importancia del Método

- Permite encontrar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales parciales.
- Se usa en una amplia gama de problemas físicos.
- Facilita la comprensión de la dinámica de sistemas físicos con condiciones de frontera.

Actividades Propuestas

1. Aplicar el método de separación de variables a la ecuación de Laplace en una región finita.
2. Resolver la ecuación de calor en un intervalo con condiciones de Neumann.
3. Determinar la solución de la ecuación de onda con condiciones mixtas.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas