

Semana 4: Series de Fourier

Curso de EDPs

February 10, 2025

Objetivo de la Semana 4

- ▶ Introducir la serie de Fourier y su importancia en la resolución de EDPs.
- ▶ Analizar la convergencia de las series de Fourier.
- ▶ Aplicar la serie de Fourier a la ecuación de calor y la ecuación de onda.

Definición de Serie de Fourier

Dada una función periódica $f(x)$ en el intervalo $[-P, P]$, su serie de Fourier es:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{P} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{P} \right) \right).$$

Los coeficientes están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{2P} \int_{-P}^P f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{P} \right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{P} \right) dx.$$

Definición de Serie de Fourier (2da Parte)

Si la función está definida en el intervalo $[0, L]$, las fórmulas se modifican a:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx.$$

Ejemplo: Serie de Fourier de una Función por Partes

Sea $f(x)$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L, \\ -1, & -L < x < 0. \end{cases}$$

Aplicamos las fórmulas para calcular los coeficientes y obtenemos:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Convergencia de la Serie de Fourier

- ▶ Si $f(x)$ es continua por partes y tiene derivadas acotadas, su serie de Fourier converge puntualmente excepto en discontinuidades.
- ▶ En puntos de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio de los valores laterales.

Ejemplo: En el caso de la función por partes anterior, la convergencia en $x = 0$ es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(0) = 0.$$

Aplicación: Ecuación de Calor

Consideremos la ecuación de calor:

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Condiciones de frontera:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Expandiendo $f(x)$ en serie de Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k(2n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Aplicación: Ecuación de Onda

Consideremos la ecuación de onda:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Expandiendo en serie de Fourier, la solución es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \left(\frac{2n\pi ct}{L} \right) + B_n \sin \left(\frac{2n\pi ct}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} \right).$$

Ejercicios Propuestos

1. Calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ y en $[0, 2\pi]$.
2. Resolver la ecuación de calor en $[0, L]$ con condiciones de Dirichlet usando series de Fourier.
3. Determinar la solución de la ecuación de onda con condiciones mixtas.