Semana 5: Aplicaciones de Series de Fourier a Problemas de Onda y Calor

Curso de EDPs

February 18, 2025

Objetivo de la Semana 5

- Aplicar series de Fourier a la resolución de la ecuación del calor y la ecuación de onda en una dimensión espacial.
- Comprender la interpretación física de las soluciones obtenidas.
- Resolver problemas con condiciones de frontera homogéneas de Neumann.

Ecuación del Calor en una Dimensión

Consideremos la ecuación del calor:

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Condiciones de frontera homogéneas de Neumann:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

Condición inicial:

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Usamos separación de variables y series de Fourier para obtener la solución:

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k(2n\pi/L)^2 t} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),$$

con coeficientes:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx.$$

Ejemplo: Ecuación del Calor

Si tomamos como condición inicial:

$$f(x) = \frac{4}{L^2}x(L - x),$$

entonces los coeficientes de Fourier se obtienen como:

$$a_n = \frac{8}{L^3}\int_0^L x(L - x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tras resolver la integral, se obtiene la solución explícita para $u(x, t)$.

Ecuación de Onda en una Dimensión

Consideremos la ecuación de onda:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Condiciones de frontera homogéneas de Neumann:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= h(x), \quad 0 < x < L, \\ u_t(x,0) &= 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Usamos separación de variables y series de Fourier para obtener la solución:

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi ct}{L}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),$$

con coeficientes:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx.$$

Ejemplo: Ecuación de Onda

Si tomamos como condición inicial:

$$h(x) = 1 - 2|x - 1|,$$

entonces los coeficientes de Fourier se obtienen como:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L (1 - 2|x - 1|) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx.$$

Tras resolver la integral, se obtiene la solución explícita para $u(x, t)$.

Interpretación de las Soluciones

- La solución de la ecuación del calor muestra cómo una distribución inicial de temperatura se suaviza con el tiempo.
- La solución de la ecuación de onda representa la propagación de una perturbación inicial en un medio restringido.
- Ambas soluciones dependen de los coeficientes de Fourier, que determinan la contribución de cada modo a la evolución del sistema.

Ejercicios Propuestos

1. Resolver la ecuación del calor en $[0, L]$ con condiciones de Neumann homogéneas y condición inicial $f(x) = x(L - x)$.
2. Resolver la ecuación de onda con condiciones de frontera homogéneas de Neumann en $[0, L]$ y condición inicial $h(x) = 1 - 2|x - 1|$.
3. Analizar cómo la serie de Fourier afecta la convergencia de las soluciones en ambos problemas.