Semana 6: Ecuaciones Hiperbólicas y Método de Características

Curso de EDPs

February 24, 2025

Objetivo de la Semana 6

- Introducir las ecuaciones hiperbólicas y su solución mediante el método de características.
- Analizar la ecuación de transporte y la ecuación de onda.
- Estudiar las propiedades de causalidad y conservación de energía.
- Resolver ecuaciones hiperbólicas en dominios simples.

Ecuaciones Hiperbólicas: Definición

Una ecuación diferencial parcial de segundo orden se dice hiperbólica si puede escribirse en la forma:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y),$$

donde la condición de hiperbólicidad es que el discriminante satisface:

$$b^2 - ac > 0.$$

Ejemplo típico: la ecuación de onda en una dimensión:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Método de Características: Ecuación de Transporte

La ecuación de transporte en su forma más simple es:

$$u_t + cu_x = 0.$$

Para resolverla, buscamos curvas características en las que la ecuación se reduce a una ODE. Las ecuaciones características son:

$$\frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Solución general:

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

donde f es determinada por la condición inicial.

Ejemplo: Ecuación de Transporte

Resolver:

$$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x,0) = e^{-x^2}.$$

Usando el método de características, obtenemos la solución:

$$u(x,t) = e^{-(x-2t)^2}.$$

Ecuación de Onda: Solución por Características

La ecuación de onda en una dimensión es:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Definiendo las variables características:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct,$$

la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

La solución general es:

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

donde f y g se determinan por condiciones iniciales.

Propiedades de Causalidad y Conservación de Energía

Causalidad:

- La información viaja a velocidades finitas en ecuaciones hiperbólicas.
- Para la ecuación de onda, la solución en un punto depende solo de datos dentro del cono de influencia.

Conservación de Energía:

- Se define la energía como:

$$E(t) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} u_x^2 \right) dx.$$

- Se demuestra que $\frac{dE}{dt} = 0$, indicando conservación de energía.

Ejercicios Propuestos

1. Resolver la ecuación de transporte $u_t + 3u_x = 0$ con condición inicial $u(x,0) = \sin(x)$.
2. Resolver la ecuación de onda $u_{tt} = 4u_{xx}$ con condiciones iniciales:

$$u(x,0) = e^{-x^2},$$
$$u_t(x,0) = 0.$$

3. Desarrollar un procedimiento cálculo de soluciones aproximadas de Fourier para el problema:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - 16\, u_{xx} = 0,\\
&u(0,t) = u(3,t) = 0,\\
&u(x,0) = (H(x-1) - H(x-2))(1 - |2x-3|),\\
&u_t(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

Donde $H(x)$ representa la función escalón unitario.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas