Semana 7: Ecuaciones Elípticas

Curso de EDPs

March 4, 2025

Objetivo de la Semana 7

- Introducir las ecuaciones de Laplace y Poisson.
- Estudiar los principios máximos y la unicidad de soluciones.
- Analizar la estructura y propiedades de las ecuaciones elípticas.

Definición de Ecuaciones Elípticas

Una ecuación diferencial parcial de segundo orden en dos variables se dice elíptica si puede escribirse en la forma:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x, y),$$

donde la condición de elipticidad es que el discriminante satisface:

$$b^2 - ac < 0.$$

Ejemplo clásico: la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson es una generalización de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ representa una fuente o carga en el dominio.
Ejemplo: En electrostática, la ecuación de Poisson describe el potencial eléctrico $u(x, y)$ debido a una distribución de carga $ho(x, y)$:

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Principio del Máximo

El principio del máximo establece que si $u(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace en una región acotada Ω, entonces:

- $u(x, y)$ alcanza su máximo y mínimo en la frontera de Ω.
- No hay máximos o mínimos locales en el interior a menos que u sea constante.

Consecuencia: La solución de un problema de Dirichlet es única.

Ejemplo: Aplicación del Principio del Máximo

Sea $u(x, y)$ la solución del problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{en } \Omega, \\ u &= g(x, y), \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Entonces, por el principio del máximo,

$$\min_{\partial\Omega} g \leq u(x, y) \leq \max_{\partial\Omega} g.$$

Unicidad de Soluciones para la Ecuación de Laplace

Si u_1 y u_2 son soluciones de:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, &\quad \text{en } \Omega, \\ u = g(x, y), &\quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

entonces su diferencia $v = u_1 - u_2$ satisface:

$$\begin{aligned} \Delta v = 0, &\quad \text{en } \Omega, \\ v = 0, &\quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Por el principio del máximo, $v = 0$ en todo Ω, lo que implica que $u_1 = u_2$ y por lo tanto la solución es única.

Actividad de Conceptualización de la Semana

Usar el principio del máximo para demostrar la unicidad de soluciones en un problema de Poisson.

Actividad Didáctica de Aplicación de la Semana

Considerando la EDP:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$
$$u(x, 0) = u(x, L_x) = 0,$$
$$u(0, y) = u_t(L_y, y) = 0.$$

y considerando además el operador de sumas parciales de Fourier:

$$\mathcal{F}_{N_x,N_y}(h)(x, y) := \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{m,n}(h) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

donde

$$C_{m,n}(h) := \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} h(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dxdy$$

para cada $1 \leq n \leq N_y$, $1 \leq m \leq N_x$.

Actividad Didáctica de Aplicación de la Semana (Cont.)

1. Demostrar o refutar que si $f \in R(\mathcal{F}_{N_x,N_y})$, entonces:
   $$u(x,y) = \mathcal{F}_{N_x,N_y}(u)(x,y)$$
   $$= \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} A_{m,n}(u) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$
   donde
   $$A_{m,n}(u) := -\frac{L_x^2 L_y^2}{\pi^2 L_x^2 n^2 + \pi^2 L_y^2 m^2} C_{m,n}(f)$$
   para cada $1 \leq n \leq N_y$, $1 \leq m \leq N_x$.
2. En caso de ser posible, desarrollar una metodología de solución de este tipo de problemas.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas