Semana 8: Soluciones Débiles y el Teorema de Lax-Milgram

Curso de EDPs

March 11, 2025

Objetivo de la Semana 8

- Introducir el concepto de soluciones débiles y formulaciones variacionales.
- Aplicar el teorema de Lax-Milgram a ecuaciones elípticas.
- Comprender el uso del análisis funcional en ecuaciones diferenciales parciales.

Definición de Solución Débil

Dada la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

una función $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil si satisface:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Espacios de Sobolev y Norma en $H_0^1(\Omega)$

El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ está definido como:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\}.$$

El subespacio $H_0^1(\Omega)$ contiene funciones con traza cero en $\partial\Omega$.
La norma en $H_0^1(\Omega)$ se define como:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta norma mide la energía de la función en términos de su gradiente y es inducida por el producto interno:

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Formulación Variacional

Dado el operador bilineal:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

la ecuación de Poisson en forma variacional es:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema de Lax-Milgram

Si $a(u, v)$ es un operador bilineal, simétrico, continuo y coercivo en $H_0^1(\Omega)$, entonces existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Definición de Coercividad

Una forma bilineal $a(u, v)$ es coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Esto implica un control fuerte sobre la norma de u, lo que es clave para garantizar la existencia y unicidad de soluciones mediante el teorema de Lax-Milgram.

Ejemplo de Aplicación

Consideremos:

$$-\Delta u + u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Su formulación variacional es:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Por Lax-Milgram, la existencia y unicidad de la solución está garantizada.

Ejercicios Propuestos

1. Demostrar que la solución débil de la ecuación de Poisson es única.
2. Probar que el operador bilineal $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ es coercivo en $H_0^1(\Omega)$.
3. Resolver la ecuación $-\Delta_x u + u = 4x(1-x) + 8$ en $\Omega = (0, 1)$ con $u(0) = u(1) = 0$ usando la formulación variacional.