Notas de Clase:

# Nociones Básicas de Procesos Estocásticos

Fredy Vides
Departamento de Matemática Aplicada, UNAH

## Contents

# 1 Preliminares

## 1.1 Definición de variable aleatoria

Una *variable aleatoria* es una función que asigna un valor numérico a cada resultado posible de un experimento aleatorio, representando este valor en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Esta asignación permite cuantificar la aleatoriedad en términos probabilísticos.

## 1.2 Solución de sistemas lineales por mínimos cuadrados con restricciones

Para el estudio de algunos procesos estocásticos, es útil resolver sistemas lineales por el método de mínimos cuadrados, minimizando el error cuadrático de $Ax = b$, con restricciones $Cx = d$.

## 1.3 Optimización cuadrática y representación como sistema lineal con restricciones

Problemas de optimización cuadrática $\min_x \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$ se transforman en sistemas lineales con restricciones mediante multiplicadores de Lagrange.

# 2 Definición de proceso estocástico

Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde cada $X_t$ toma valores en un espacio medible $S$ y el índice $t$ representa tiempo.

## 2.1 Ejemplo: Espacio de probabilidad para el lanzamiento de una moneda

Para un proceso estocástico correspondiente al lanzamiento de una moneda, definimos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

- **Espacio muestral:** $\Omega = \{E, N\}^\infty$, donde $E$ representa "Escudo" y $N$ representa "No Escudo". Los elementos de $\Omega$ son secuencias infinitas de lanzamientos, como $(E, N, E, E, \dots)$.

- **Álgebra de eventos:** $\mathcal{F}$ es la $\sigma$-álgebra generada por eventos de la forma $\{\omega \in \Omega : \omega_1 = E\}$, $\{\omega \in \Omega : \omega_2 = N\}$, etc.

- **Función de probabilidad:** $P(\omega_i = E) = 0.5$ y $P(\omega_i = N) = 0.5$ para cada lanzamiento $i$.

## 2.2 Modelo matricial teórico del proceso estocástico correspondiente al lanzamiento de una moneda

El lanzamiento de una moneda se modela como:

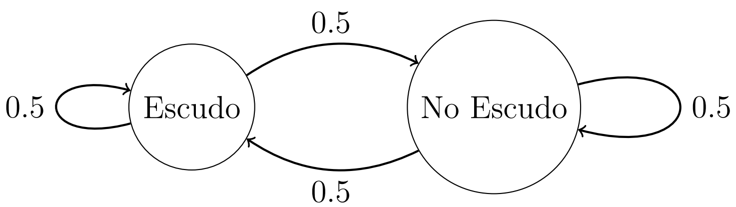
$$r(t+1) = Ar(t),$$

donde $r(t) = [p_E(t), p_N(t)]^T$ representa las probabilidades de estar en ”Escudo” o ”No Escudo”, y la matriz de transición es

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

### 2.2.1 Grafo de transiciones entre estados

El siguiente grafo representa las transiciones entre los dos estados (”Escudo” y ”No Escudo”) en un sistema estocástico de tiempo discreto binario:




### 2.2.2 Sistema dinámico lineal de K-Markov

Un sistema dinámico de tiempo discreto de tipo K-Markov está determinado por:

$$x(t+1) = A_0x(t) + A_1x(t-1) + A_2x(t-2) + \cdots + A_{K-1}x(t-K+1),$$

donde $x(t)$ es el estado del sistema en el tiempo $t$ y $A_0, A_1, \ldots, A_{K-1}$ son matrices de transición que capturan dependencias de órdenes anteriores.

Aunque los sistemas de K-Markov están relacionados con las cadenas o procesos de Markov, no deben confundirse con estos últimos. Los sistemas de K-Markov, incluso en el caso especial de 1-Markov, corresponden a modelos dinámicos más generales.

# 3 Ejercicios

1. Identificar la dinámica del resultado esperado en un modelo de 1-Markov a partir de datos reales de 200 lanzamientos de una moneda real. Analizar la matriz $A$ estimada y comparar con el modelo teórico.

2. Simular el modelo de lanzamiento de moneda definido por $r(t+1) = Ar(t)$ y representar la evolución de los estados correspondientes a las proporciones de ocurrencia de los resultados factibles de los lanzamientos.

# References


[1] F. Vides (2019). *Métodos Numéricos y Modelación Computacional.* Disponible en: `https://fredyvides.github.io/MNMC.pdf`

[2] I. Markovsky, S. Van Huffel, J. C. Willems, B. De Moor (2005). *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach.* SIAM.

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra Vectors, Matrices, and Least Squares.* Cambridge University Press.

[4] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio (2014). *Scientific Computing with MATLAB and Octave (4th Ed).* Springer.