Semana 1: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs)

Curso de EDPs

February 10, 2025

Objetivo de la Semana 1

- Introducir el concepto de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs).
- Explorar ejemplos simples provenientes de modelos físicos.
- Comprender la clasificación básica de las EDPs.
- Identificar las características principales de las EDPs en el contexto matemático y físico.

Definición de una EDP

Notación general:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

- $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.
- La solución es una función $u(x, y)$ que satisface la ecuación.

Orden de una EDP: Determinado por la derivada de mayor orden presente.

Ejemplos de EDPs

- Ecuación de transporte: $u_x + u_y = 0$.
- Ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- Ecuación de onda: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Linealidad: Un operador $L(u)$ es lineal si:

$$L(u+v) = L(u) + L(v), \quad L(cu) = cL(u).$$

Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Forma general: $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$. **Método geométrico:**

- Las características son curvas donde la solución es constante.
- Resolución del ODE asociado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

Ejemplo: Resolver $4u_x - 3u_y = 0$ con $u(0,y) = y^3$.

$$u(x,y) = \frac{(3x+4y)^3}{64}.$$

Método de Coordenadas

Transformación de coordenadas:

$$x' = 4x - 3y,$$
$$y' = 3x + 4y.$$

Forma simplificada: En términos de x' y y', la ecuación se convierte en:

$$u_{x'} = 0 \implies u(x, y) = f(x').$$

Condición inicial: Determina f y la solución final.

Modelos Físicos y Motivación

Ejemplos destacados:

- **Ecuación de transporte:** $u_t + cu_x = 0$ (flujo constante).
- **Ecuación de onda:** $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ (vibraciones en una cuerda).
- **Ecuación de difusión:** $u_t = ku_{xx}$ (propagación de calor).

Clasificación de EDPs de Segundo Orden

Formas canónicas:

- **Elíptica:** $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- **Parabólica:** $u_t = ku_{xx}$.
- **Hiperbólica:** $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Diferencias: Se distinguen por sus propiedades geométricas y físicas.

Ejercicios Propuestos

1. Verificar la linealidad y no linealidad de las EDPs presentadas.
2. Determinar si los operadores $L(u)$ dados son lineales:
   2.1 $L(u) = u_x + xu_y$.
   2.2 $L(u) = u_x + uu_y$.
3. Resolver $u_{xx} + u = 0$ y verificar las funciones arbitrarias.
4. Resolver $u_{xy} = 0$.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas