Semana 2: Condiciones Iniciales y de Frontera

Curso de EDPs

February 10, 2025

Objetivo de la Semana 2

- Comprender la importancia de las condiciones iniciales y de frontera en problemas de EDPs.
- Identificar los diferentes tipos de condiciones de frontera: Dirichlet, Neumann y Robin.
- Resolver problemas sencillos utilizando estas condiciones.

Condiciones Iniciales

Definición: Especifican el estado inicial del sistema en el tiempo $t = 0$.

- Aplicadas a ecuaciones evolutivas como la ecuación de calor o la ecuación de onda.

Ejemplo: Ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0.$$

Condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x),$$
$$u_t(x, 0) = g(x).$$

Condiciones de Frontera

Tipos principales:

1. **Dirichlet:** Se especifica el valor de la solución en la frontera.

$$u(0,t) = a, \quad u(L,t) = b.$$

2. **Neumann:** Se especifica el valor de la derivada normal en la frontera.

$$u_x(0,t) = c, \quad u_x(L,t) = d.$$

3. **Robin:** Combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y Neumann.

$$\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = e.$$

Ejemplo 1: Ecuación de Calor con Condiciones Dirichlet

Resolver:

$$u_t = ku_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0.$$

Condiciones:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Solución:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

con b_n calculados a partir de $f(x)$ mediante series de Fourier.

Ejemplo 2: Ecuación de Onda con Condiciones Mixtas

Resolver:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0.$$

Condiciones:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u_x(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Solución:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Importancia de las Condiciones

- Garantizan la unicidad y existencia de la solución.
- Reflejan las propiedades físicas del problema.
- Permiten modelar situaciones reales con precisión.

Nota: La elección de condiciones de frontera depende del contexto físico del problema.

Ejercicios Propuestos

1. Resolver la ecuación de calor con condiciones Dirichlet y una condición inicial dada.
2. Resolver la ecuación de onda con condiciones mixtas.
3. Derivar y resolver la ecuación de difusión con condiciones de Neumann.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas