Semana 1: Fundamentos funcionales y estructura de EDPs

Curso: Métodos Numéricos para EDPs (MMM-690)

Dr. Fredy Vides

2025

Maestría en Ingeniería Matemática – UNAH

Introducción a las EDPs

Motivación

- Las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) modelan una amplia variedad de fenómenos físicos.
- Ejemplos clásicos incluyen: **difusión de calor**, **vibración de cuerdas**, **dinámica de fluidos**.
- El análisis funcional provee una base rigurosa para su estudio y aproximación.

Ejemplos típicos de EDPs

- **Ecuación de Laplace:** $\Delta u = 0$
- **Ecuación del calor:** $u_t = \kappa \Delta u$
- **Ecuación de ondas:** $u_{tt} = c^2 \Delta u$
- **Ecuación de transporte:** $u_t + v u_x = 0$

Espacios de Hilbert

Definiciones clave

- Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial real o complejo con un producto interno definido, completo respecto a la norma inducida.
- Notación: $\langle u, v\rangle$ para el producto interno.
- Ejemplo: $L^2(\Omega)$ con $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$

Propiedades

- **Ortogonalidad:** $\langle u, v \rangle = 0$ implica que u y v son ortogonales.
- **Proyección ortogonal:** Dado un subespacio cerrado W, para todo $f \in H$, existe una única proyección $P_W(f) \in W$ tal que $f - P_W(f) \perp W$.
- Estas ideas son fundamentales para los métodos de Galerkin y elementos finitos.

Normas y operadores

Normas y convergencia

- La norma inducida por el producto interno: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$
- Convergencia fuerte vs. convergencia débil.
- Las normas nos permiten cuantificar el error de aproximación.

Operadores lineales continuos

- Un operador $T : H \to H$ es lineal si $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$.
- Es **continuo** si existe $C > 0$ tal que $\|T(u)\| \leq C\|u\|$.
- El conjunto de operadores continuos es un espacio de Banach.

Cierre

Resumen de la semana

- Introducción a las EDPs clásicas y sus contextos físicos.
- Fundamentos de espacios de Hilbert y proyecciones.
- Relevancia de normas y operadores lineales continuos en el análisis numérico.

Lecturas sugeridas

- Atkinson *Theoretical Numerical Analysis*, Secciones 1.3–1.5 y 2.1–2.2
- Vides *MNMC*, Capítulos 1.1–1.3

Notas

Notas

Notas

Notas