

Semana 6: Problemas Elípticos y Formulación Variacional

Curso: Métodos Numéricos para EDPs (MMM-690)

Dr. Fredy Vides

2025

Maestría en Matemática Aplicada – UNAH

Objetivos de la Semana

- Introducir las ecuaciones elípticas: Laplace y Poisson.
- Definir soluciones débiles y espacios de Sobolev.
- Presentar la formulación variacional.
- Aplicar el teorema de Lax-Milgram.

Ejemplos Clásicos de EDPs Elípticas

- **Laplace:** $\Delta u = 0$ en Ω , $u = 0$ en $\partial\Omega$
- **Poisson:** $-\Delta u = f$ en Ω , $u = 0$ en $\partial\Omega$
- Son modelos de difusión en equilibrio.

Definición de Solución Débil

- Para $f \in L^2(\Omega)$, buscamos $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

- Esta formulación se obtiene al multiplicar por una función de prueba v y aplicar integración por partes.

- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)^d\}$
- $H_0^1(\Omega)$: funciones en $H^1(\Omega)$ con traza cero en $\partial\Omega$
- Norma: $\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$

Formulación Variacional General

- Sea $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$
- Definimos: Buscar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- La solución débil es una función que satisface esta identidad para todo v .

Teorema de Lax-Milgram

Hipótesis:

- $a(u, v)$ es bilineal, simétrico, continuo y coercivo.
- f funcional lineal y continuo.

Conclusión: Existe único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ para todo v .

- Coercividad: $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$
- Continuidad: $|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$

- La formulación variacional es la base del Método de Elementos Finitos.
- El MEF aproxima $u \in H_0^1(\Omega)$ por funciones en subespacios finito-dimensionales $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.
- Problema discretizado: encontrar $u_h \in V_h$ tal que:

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h$$

Ejemplo: Ecuación Poisson 1D

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

Formulación variacional: $\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$

1. Verificar coercividad de $a(u, v)$ en $H_0^1(\Omega)$.
2. Demostrar la existencia y unicidad de solución usando Lax-Milgram.
3. Implementar una solución aproximada mediante MEF en 1D.

- Atkinson *Theoretical Numerical Analysis*, Cap. 5.1–5.4
- Vides *MNMC*, Secciones 3.1–3.5