

# Aproximación de la Exponencial de Matrices mediante Métodos de Padé y su Aplicación al Método de Líneas para EDPs

Fredy Vides

2025

## 1 Introducción

La resolución eficiente de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) mediante esquemas numéricos exige aproximaciones precisas y estables de operadores involucrados. Una herramienta poderosa en este contexto es la aproximación de la exponencial de matrices,  $e^{tA}$ , mediante fraccionarios racionales como los métodos de Padé. Estos métodos permiten resolver de manera estable ciertos sistemas semidiscretizados provenientes de la aplicación del *método de líneas* con diferencias finitas.

## 2 Generalidades de los Métodos de Padé

Dado  $f(z)$  una función analítica alrededor de  $z = 0$ , su serie de Taylor hasta orden  $m + n$  es

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k z^k.$$

Un aproximante de Padé  $R_{m/n}(z)$  de orden  $(m, n)$  es una fracción racional de la forma

$$R_{m/n}(z) = \frac{n_m(z)}{d_n(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{1 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},$$

que satisface la relación:

$$d_n(z)\hat{f}(z) - n_m(z) = \mathcal{O}(z^{m+n+1}).$$

Es decir, la diferencia entre la función  $f(z)$  y su aproximante de Padé coincide con los primeros  $m + n$  términos de la serie de Taylor de  $f(z)$ , haciendo de  $R_{m/n}(z)$  una mejor aproximación racional que el simple truncamiento polinomial.

### 3 Aproximación de $e^{tA}$ mediante Padé

Para matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la función  $f(z) = e^z$  se puede aproximar por  $R_{m/n}(z)$  como:

$$e^{tA} \approx R_{m/n}(tA) = (d_n(tA))^{-1} n_m(tA).$$

Esta aproximación es especialmente útil en el contexto de métodos numéricos para EDPs, donde  $A$  es la matriz que resulta de discretizar el operador espacial mediante diferencias finitas.

### 4 Aplicación al Método de Líneas

El método de líneas consiste en discretizar las variables espaciales en una EDP, obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t),$$

con condiciones iniciales  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ .

La solución formal del sistema homogéneo es:

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{u}_0.$$

Usando aproximantes de Padé para  $e^{tA}$ , se obtiene:

$$\mathbf{u}(t) \approx R_{m/n}(tA) \mathbf{u}_0 = d_n(tA)^{-1} n_m(tA) \mathbf{u}_0,$$

lo cual reduce el problema a resolver un sistema lineal con matriz  $d_n(tA)$ , que se puede implementar con alta estabilidad numérica.

### 5 Ejemplo: Ecuación del Calor en 1D

Consideremos la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con discretización espacial mediante diferencias finitas centradas. El sistema resultante es

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u},$$

donde  $A$  es una matriz tridiagonal.

Aplicando  $R_{2/2}(\Delta t A)$ , se obtiene una expresión estable de segundo orden para avanzar en el tiempo.

### 6 Conclusión

Los aproximantes de Padé proporcionan una herramienta robusta para la integración temporal de sistemas semidiscretizados provenientes de EDPs. Su combinación con el método de líneas ofrece estabilidad y precisión, particularmente en aplicaciones de simulación y modelado computacional de fenómenos físicos.

## Referencias

- Weimin Han, Kendall E. Atkinson, *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, Springer, 2009.
- Fredy Vides, *MNMC – Métodos Numéricos para Modelos Computacionales*, notas internas.
- Moler, C., Van Loan, C., "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later," SIAM Review, 2003.