Práctica de Laboratorio:

Reducción de orden y análisis matricial básico de Modelos de 1-Markov

Fredy Vides
Departamento de Matemática Aplicada, UNAH

1 Objetivo

El objetivo principal de esta práctica es aplicar los contenidos de las primeras tres semanas del curso de procesos estocásticos al análisis matricial básico de Procesos de Markov. Estos procesos se modelan mediante ecuaciones de la forma:

$$x(t+1) = x(t)A,$$

donde:

- $x(t)$ es el vector de estado en el tiempo t.
- A es una matriz no estructurada.

El enfoque se centra en estudiar algunas propiedades básicas coeficientes de la matriz A, utilizando una metodología de estimación paramétrica no estructurada.

2 Actividades de Laboratorio

1. **Análisis matricial del Modelo 1:**

   - Considerando el proceso de Markov determinado por la matriz de transición de estados:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Determinar si el PM correspondiente es irreducible o no, y en caso de no serlo identificar los sub-procesos independientes correspondientes.
- Clasificar los estados del PM correspondiente por tipo de periodicidad, especificando los periodos de los estados periódicos en caso de existir alguno.
- Calcular simulaciones del proceso para el vector de estado inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Calcular el conjunto cociente $EE(PM)/\leftrightarrow$ para el PM correspondiente.
- En caso de ser posible, calcular una distribución estacionaria del proceso.

2. **Análisis matricial del Modelo 2:**

   - Considerando el proceso de Markov determinado por la matriz de transición de estados:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

   - Determinar si el PM correspondiente es irreducible o no, y en caso de no serlo identificar los sub-procesos independientes correspondientes.
   - Clasificar los estados del PM correspondiente por tipo de periodicidad, especificando los periodos de los estados periódicos en caso de existir alguno.
   - Calcular simulaciones del proceso para el vector de estado inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$.

- Calcular el conjunto cociente $EE(PM)/\leftrightarrow$ para el PM correspondiente.
- En caso de ser posible, calcular una distribución estacionaria del proceso.

3. **Análisis matricial del Modelo 3:**

   - Considerando el proceso de Markov determinado por la matriz de transición de estados:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Determinar si el PM correspondiente es irreducible o no, y en caso de no serlo identificar los sub-procesos independientes correspondientes.
   - Clasificar los estados del PM correspondiente por tipo de periodicidad, especificando los periodos de los estados periódicos en caso de existir alguno.
   - Calcular simulaciones del proceso para el vector de estado inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$.
   - Calcular el conjunto cociente $EE(PM)/\leftrightarrow$ para el PM correspondiente.
   - En caso de ser posible, calcular una distribución estacionaria del proceso.

3 Entregables

- Actualización de Reporte técnico de progreso que documente:

  - Los análisis matriciales realizados como parte de esta práctca de laboratorio, y el análisis matricial correspondiente del modelo epidemiológico considerado en el laboratorio de la semana 2.
- Código utilizado realizar los análisis matriciales correspondientes.
- Gráficos que representen:
  - Grafos de transiciones entre estados.
  - Gráficos de las simulaciones de la evolución temporal de las componentes de los vectores $x(t)$ de estado, para un horizonte de tiempo de 200 pasos en el futuro con respecto a cada estado inicial.

References

[1] Goswami, A. y Rao, B. V. *A Course in Applied Stochastic Processes*. Hindustan Book Agency, 2006.

[2] Ito, Kiyosi. *Essentials for Stochastic Processes*. Association of Mathematical Society, 2006.

[3] Shapiro, A., Dentcheva, D. y Ruszczynski, A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[4] Stroock, D. W. *An Introduction to Markov Processes*. Graduate Texts in Mathematics Series, Springer Verlag, 2005.

[5] Van Kampen, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Third Edition, North Holland, 2007.

[6] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.

[7] Vides, F. *Métodos Numéricos y Modelación Computacional*. Disponible en: `https://fredyvides.github.io/MNMC.pdf`, 2019.

[8] Markovsky, I., Van Huffel, S., Willems, J. C., De Moor, B. *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach*. SIAM, 2005.

[9] Boyd, S., Vandenberghe, L. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.

[10] Quarteroni, A., Saleri, F., Gervasio, P. *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Fourth Edition, Springer, 2014.