

Proyecto de Aplicación: Modelación de la Ecuación de Onda con Disipación en 2D

Curso de EDPs

April 8, 2025

Objetivo

Estudiar y simular el comportamiento de soluciones de la ecuación de onda con término de disipación en dos dimensiones espaciales, utilizando herramientas analíticas (series de Fourier) y computacionales.

Modelo Matemático

Consideramos la ecuación de onda con disipación en un dominio rectangular $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u - \alpha^2 \partial_x^2 u - \beta^2 \partial_y^2 u = 0, \quad (1)$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \phi(x, y), \\ \partial_t u(x, y, 0) &= 0, \end{aligned}$$

y condiciones de frontera nulas (de tipo Dirichlet $u = 0$ o Neumann $\partial_n u = 0$ en $\partial\Omega$).

Actividades del Proyecto

1. Reformular el problema utilizando separación de variables y representar la solución en términos de una serie de Fourier doble (en x y y).
2. Derivar la ecuación ODE satisfecha por los coeficientes modales $u_{mn}(t)$ para cada par de modos (m, n) , identificando la forma general:

$$\ddot{u}_{mn}(t) + \gamma \dot{u}_{mn}(t) + \lambda_{mn} u_{mn}(t) = 0,$$

$$\text{donde } \lambda_{mn} = \alpha^2 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2.$$

3. Estudiar analíticamente el comportamiento de los coeficientes $u_{mn}(t)$ y determinar condiciones sobre $\gamma > 0$ para garantizar la disipación de la energía en el tiempo.
4. Implementar una simulación numérica (por ejemplo en MATLAB/Octave o Python) para visualizar la evolución de $u(x, y, t)$ para una condición inicial $\phi(x, y)$ dada.
5. Visualizar la atenuación de la solución en el tiempo para distintos valores del parámetro γ .

Entregables

- Documento PDF con el desarrollo analítico y discusión de resultados.
- Gráficos o animaciones que ilustren la atenuación de las ondas.
- Código fuente documentado.

Componentes de evaluación

- Documentación de análisis teórico (15 puntos).
- Documentación de resultados de cálculo de solución aproximada de modelo central del proyecto para condiciones de frontera de Dirichlet (15 puntos).
- Documentación de resultados de cálculo de solución aproximada de modelo secundario del proyecto para condiciones de frontera de Neumann (10 puntos).
- Documentación de código fuente funcional en un repositorio adecuado (10 puntos).