Nociones Básicas de Procesos Estocásticos

Fredy Vides

Departamento de Matemática Aplicada, UNAH

Contenido

Definición de Variable Aleatoria

- Una *variable aleatoria* es una función que asigna un valor numérico a cada resultado de un experimento aleatorio.
- Definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Permite cuantificar la aleatoriedad en términos probabilísticos.

Sistemas Lineales y Optimización

Resolución de sistemas lineales por mínimos cuadrados:

$$\min_{x} \|Ax - b\|^2, \quad \text{sujeto a } Cx = d.$$

Optimización cuadrática:

$$\min_{x} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x.$$

Se resuelve mediante multiplicadores de Lagrange, transformándose en un sistema lineal con restricciones.

Definición de Proceso Estocástico

- Colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$.
- Definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Cada X_t toma valores en un espacio medible S.

Ejemplo: Lanzamiento de una Moneda

- **Espacio muestral:** $\Omega = \{E, N\}^{\infty}$, donde $E =$ "Escudo", $N =$ "No Escudo".
- **Álgebra de eventos:** $\mathcal{F}$ generada por secuencias de lanzamientos.
- **Función de probabilidad:** $P(\omega_i = E) = 0.5$, $P(\omega_i = N) = 0.5$.

Modelo de Lanzamiento de moneda como PE discreto

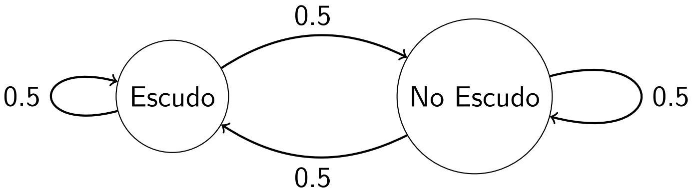
El modelo está definido por:

$$r(t+1) = Ar(t),$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Grafo de Transiciones



Sistemas Dinámicos de K-Markov

Un sistema K-Markov se define como:

$$x(t+1) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + \cdots + A_{K-1} x(t-K+1).$$

Nota: Aunque están relacionados con las cadenas de Markov, los sistemas de K-Markov son modelos dinámicos más generales.

Ejercicios

1. Identificar la dinámica del resultado esperado en un modelo de 1-Markov a partir de datos reales de 200 lanzamientos de una moneda real. Analizar la matriz A estimada y comparar con el modelo teórico.
2. Simular el modelo de lanzamiento de moneda definido por $r(t+1) = Ar(t)$ y representar la evolución de los estados correspondientes a las proporciones de ocurrencia de los resultados factibles de los lanzamientos.

Bibliografía

- F. Vides (2019). *Métodos Numéricos y Modelación Computacional*. Disponible en: `https://fredyvides.github.io/MNMC.pdf`
- I. Markovsky et al. (2005). *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems*. SIAM.
- S. Boyd, L. Vandenberghe (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra*. Cambridge University Press.
- A. Quarteroni et al. (2014). *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Springer.