Proyecto PI-063-DICIHT: Identificación Aproximada de Sistemas Dinámicos Estructurados con Simetrías

Autómatas Finitos Topológicamente Controlados para la Industria 4.0

Fredy Vides[1]

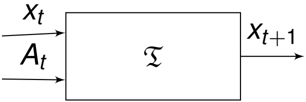
[1] Centro de Innovación en Cómputo Científico **CICC**
Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación
Universidad Nacional Autónoma de Honduras **UNAH-CU**
Centre for de Analysis of Data-Driven Systems **CADDS**

Sesión de Presentación de Avances CADDS/IME, 2021

Formulación del Problema

Cómputo de Modelos Predictivos Basados en Datos

- Dado un grupo finito $G_N = \{g_1, \ldots, g_N\} \subset \mathbb{U}(n)$, un sistema dinámico discreto G_N-equivariante $(\Sigma, \mathscr{T})$ y una serie de tiempo $\{x_t\}_{t\geq 1} \subset \Sigma \subset \mathbb{C}_n$.
- Calcular/descubrir un modelo para el dispositivo:



(1)

  que convierte el estado presente x_t en el estado futuro $x_{t+1} = \mathscr{T}(x_t)$ con base en una matriz de parámetros A_t a identificar.
- El dispositivo $\mathfrak{T}$ recibe el nombre de operador de transición.

Motivación

Problemas, preguntas e ideas formuladas y presentadas por:

- Arveson: C^*-algebras en álgebra lineal numérica.
- Kaheman, Kutz and Brunton: métodos basados en teoría de operadores para identificación de sistemas.
- Loring, Vides: Teoría-K de operadores en álgebra lineal numérica.

Enfoque **Gemelo Digital** (Digital Twin)

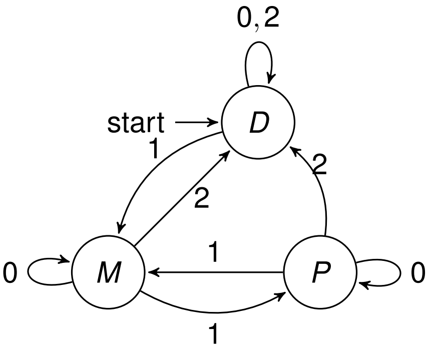


Figura: Autómata finito correspondiente a un gemelo digital estándar.

Matrices de Trayectorias de Hankel

- Dado un conjunto de entrenamiento $\Sigma_T = \{x_1, \ldots, x_T\} \subset \mathbb{C}^n$
- $\mathscr{H}_L(\Sigma_T)$ denota la matriz de trayectorias de Hankel definida por la expresión.

$$\mathscr{H}_L(\Sigma_T) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{T-L+1} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{T-L+2} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{T-L+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \cdots & x_T \end{bmatrix}$$

Matrices de Trayectorias de Hankel G_N-Estructuradas

- Dado un grupo finito $G_N = \{g_1, \ldots, g_N\} \subset \mathbb{U}(n)$.
- un conjunto de entrenamiento $\Sigma_T = \{x_1, \ldots, x_T\} \subset \mathbb{C}^n$
- $\mathscr{H}_L(\Sigma_T, G_N)$ denota la matriz de datos estructurada:

$$\mathscr{H}_L(\Sigma_T, G_N) = \begin{bmatrix} I_L \otimes g_1 \mathscr{H}(\Sigma_T) & \cdots & I_L \otimes g_N \mathscr{H}_L(\Sigma_T) \end{bmatrix}$$

Reformulación Topológica no-conmutativa
C^*-Representaciones

Problema de Conectividad No-conmutativa

- Dado un orden de error $\delta > 0$
- Dado un grupo finito $G_N = \{g_1, \ldots, g_N\} \subset \mathbb{U}(n)$,
- datos de entrenamiento $\Sigma_T = \{x_t\}_{t=1}^T \subset \Sigma$
- una compresión $K : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^L \to \mathbb{C}^n$
- Calcular/descubrir y una representación esparcida $C([-1,1]) * C([-1,1]) \to C^*(H_{1,T}, H_{2,T}) \subset M_n(\mathbb{C}) \otimes M_L(\mathbb{C})$ tales que:
  - Existe $\hat{A}_t \in C^*(H_{1,T}, H_{2,T})$ tal que:
    - $A_T I_L \otimes g_j = I_L \otimes g_j A_T$ para cada $g_j \in G_N$
    - $K_L\left(\hat{A}_T \begin{bmatrix} x_t^\top & x_{t+1}^\top & \cdots & x_{t+L-1}^\top \end{bmatrix}^\top\right) \approx_{\mathscr{O}(\delta)} \mathfrak{T}(x_t)$, $t = 1, \ldots, T$.

Resultado Principal

Theorem

Existe un invariante $\mathrm{drk}, *_{\delta}(\Sigma_T)$ con valores en el grupo $K_0(\mathbb{C})$ que debe anularse para que el problema de conectividad no-conmutativa previo sea soluble.

Ejemplo: Ilustración gráfica de obstrucción topológica

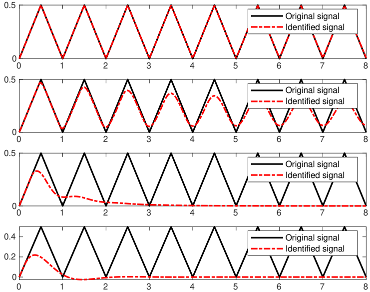


Figura: $drk_{\delta,*}(\Sigma_T) = 0, L = 17$ (primera fila), $drk_{\delta,*}(\Sigma_T) = 1, L = 16$ (segunda fila), $drk_{\delta,*}(\Sigma_T) = 1, L = 10$ (tercera fila). $drk_{\delta,*}(\Sigma_T) = 1, L = 5$ (cuarta fila)

Modelos predictivos calculados con **TensorFlow**

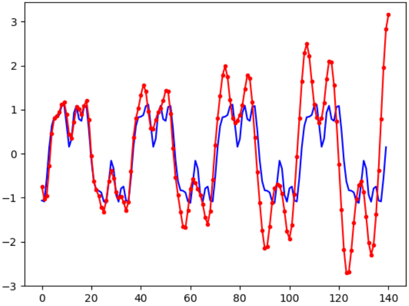


Figura: Predicción (línea roja) calculada utilizando TensorFlow de Google, Inc.

Modelo predictivo calculado con **SDSI Tool**

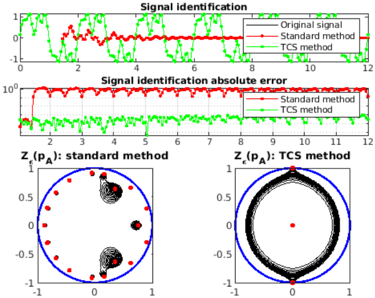
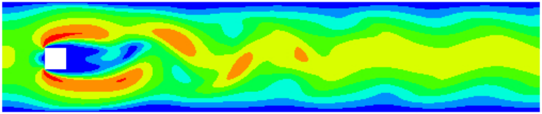


Figura: Predicción (línea verde) calculada utilizando un ATC para $\mathrm{drk}_\delta(\Sigma_T) = 0$.

Gemelos digitales para desprendimiento de vórtices



Gemelos digitales para desprendimiento de vórtices

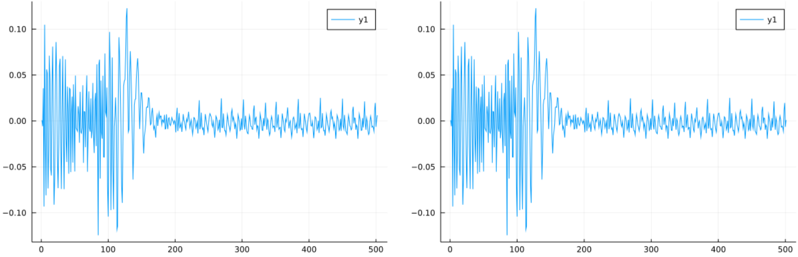
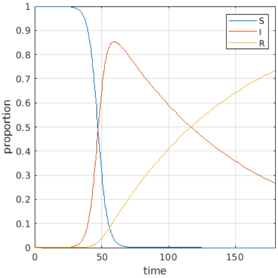


Figura: Señal sintética original (izquierda). Señal identificada por ATC (derecha) para $\mathrm{drk}_\delta(\Sigma_T) = 0$.

Gemelos digitales en matemática epidemiológica



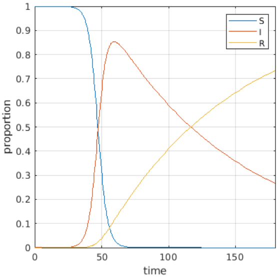


Figura: Curvas epidemiológicas de modelo SIR sintético (izquierda). Predicciones calculadas con ATC (derecha) para $\mathrm{drk}_{\delta}(\Sigma_T) = 0$.

Gemelos digitales para identificación de ondas viajeras

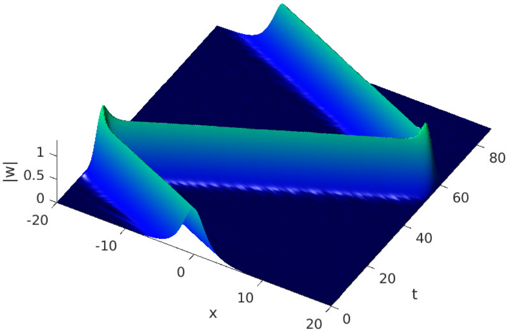


Figura: Historial de evolución de amplitudes de solución de onda viajera para el modelo no lineal: $i\partial_t w + \partial_x^2 w + q|w|^2 w = 0$.

Gemelos digitales para identificación de ondas viajeras

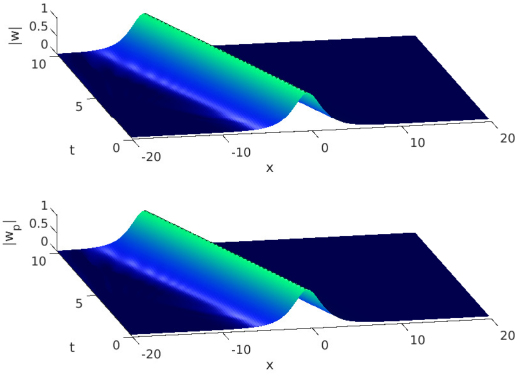


Figura: Amplitudes de entrenamiento $|w(t)|$ (arriba). Predicciones $|w_p(t)|$ calculadas con ATC para $\mathrm{drk}_\delta(\Sigma_T) = 0$ (abajo).

Trabajo Futuro

- Aplicar esquemas ATC a la automatización de gestión de inventario.
- Aplicar esquemas ATC a porcesos de mantenimiento predictivo de equipos industriales.
- Aplicar esquemas ATC en compresión de datos.
- Aplicar esquemas ATC en precesamiento de imágenes.
- Aplicar esquemas ATC en modelación basada en desempeño de estructuras: edificios, puentes...

Referencias

1. W. Arveson. $C^{*}*$-Algebras and Numerical Linear Algebra. Journal of Functional Analysis.
2. Kadierdan Kaheman, J. Nathan Kutz and Steven L. Brunton (2020). SINDy-PI: a robust algorithm for parallel implicit sparse identification of nonlinear dynamics. Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences.
3. T. Loring, F. Vides (2020). Computing Floquet Hamiltonians with Symmetries. Journal of Mathematical Physics.
4. F. Vides (2021). Sparse system identification by low-rank approximation. Remitido.
5. F. Vides. GitHub web page: `https://cadds-lab.github.io/FredyVides.html`