Proyecto General de Aplicación: Identificación de Sistemas Dinámicos Lineales de 1-Markov

Fredy Vides
Departamento de Matemática Aplicada, UNAH

1 Objetivo

El objetivo principal de este proyecto es aplicar los contenidos del curso de procesos estocásticos a la identificación de sistemas dinámicos lineales de tipo 1-Markov. Estos sistemas se modelan mediante ecuaciones de la forma:

$$x(t+1) = Ax(t) + r(t),$$

donde:

- $x(t)$ es el vector de estado en el tiempo t.
- A es una matriz estocástica cuyas columnas suman 1.
- $r(t)$ es un término residual asociado a ruido o perturbaciones.

El enfoque se centra en estimar los coeficientes de la matriz A, respetando una estructura determinada por un grafo de interacción entre los estados del vector $x(t)$.

2 Metodología

1. **Definición del Modelo:**
   - Identificar el proceso estocástico de interés y su representación mediante un sistema dinámico de 1-Markov.
   - Determinar, empírica o teóricamente, el grafo de probabilidades de transición que define las interacciones entre los estados del sistema.
   - Asegurar que la matriz A respete la estructura definida por el grafo, imponiendo ceros en las entradas correspondientes a interacciones no permitidas.

2. **Recolección de Datos:**

   - Recolectar una muestra $\{x(0), x(1), \ldots, x(N)\}$ de estados observados del proceso.
   - Verificar que los datos permitan estimar las probabilidades de transición entre los estados definidos en el modelo.

3. **Estimación de la Matriz A:**

   - Resolver el sistema de ecuaciones lineales mediante el método de mínimos cuadrados con restricciones estructurales impuestas por el grafo de interacción.
   - Garantizar que A sea estocástica, ajustando los coeficientes para que cada columna sume 1.

4. **Validación del Modelo:**

   - Comparar las predicciones del modelo con datos observados.
   - Evaluar el error entre las probabilidades estimadas y los datos reales.

3 Entregables

- Informe técnico que incluya:
  - La matriz de transición A estimada y su validación.
  - El grafo de interacciones empleado y su interpretación en el contexto del proceso modelado.
- Código utilizado para estimar y validar el modelo.
- Gráficos que representen:
  - El grafo de interacción con las probabilidades de transición.
  - La evolución temporal de las componentes del vector $x(t)$.

References

[1] Goswami, A. y Rao, B. V. *A Course in Applied Stochastic Processes.* Hindustan Book Agency, 2006.

[2] Ito, Kiyosi. *Essentials for Stochastic Processes*. Association of Mathematical Society, 2006.

[3] Shapiro, A., Dentcheva, D. y Ruszczynski, A. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[4] Stroock, D. W. *An Introduction to Markov Processes*. Graduate Texts in Mathematics Series, Springer Verlag, 2005.

[5] Van Kampen, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Third Edition, North Holland, 2007.

[6] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2003.

[7] Vides, F. *Métodos Numéricos y Modelación Computacional*. Disponible en: `https://fredyvides.github.io/MNMC.pdf`, 2019.

[8] Markovsky, I., Van Huffel, S., Willems, J. C., De Moor, B. *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach*. SIAM, 2005.

[9] Boyd, S., Vandenberghe, L. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.

[10] Quarteroni, A., Saleri, F., Gervasio, P. *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Fourth Edition, Springer, 2014.